Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Klausur - Lösungen

Louca, Stilianos

10. September 2007

Aufgabe 01

a) Das D'Alembertsche Prinzip besagt, dass die für die Erfüllung der Nebenbedingungen erforderlichen Zwangskräfte, bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten. Unter virtuellen Verrückungen versteht man jene *Verschiebungen*, die momentan geschehen, d.h für $dt = 0$, und somit nur *gedacht* sind, und in Übereinstimmung mit den Nebenbedingungen sind. Bezeichnet man mit $\delta\vec{r}_i$, $\vec{F}_i$, m_i und $\ddot{\vec{r}}_i$ jeweils die virtuelle Verrückung, die eingeprägte Kraft auf, die Masse und die Beschleunigung des i-ten Massenpunktes, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

wobei die virtuellen Verrückungen die Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{ki}\cdot d\vec{r}_i + f_{k0}dt = 0,\ \ k = 1,..,r$$

erfüllen, d.h

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{ki}\cdot\delta\vec{r}_i = 0,\ \ k = 1,...,r$$

b) Man unterteilt die Nebenbedingungen in folgende Klassen:

- Bilaterale NB sind NB die in Form von Gleichungen gegeben sind. Sie stellen doppelseitige Bindungen dar, z.b die Beschränkung auf einer Fläche.
- Unilaterale NB sind NB die in Form von Ungleichungen gegeben sind. Sie stellen somit einseitige Bindungen dar.
- Holonome NB sind NB die in der Form
$$f_k(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t) = 0$$
gegeben sind.
- Anholonome NB sind in differenziellen Form gegeben:
$$\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_{ki}\cdot d\vec{r}_i + f_{k0}dt$$
Sie sind so beschaffen, dass es keinen integrierenden Faktor gibt, und können somit nicht als holonome NB geschrieben werden.
- Skleronome NB sind NB die nicht explizit von der Zeit abhängen, d.h
$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = 0$$
bzw.
$$f_{k0} = 0$$

- Rheonome NB sind NB die explizit von der Zeit abhängen.

c) Wir beginnen mit

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i)\, \delta x_i = 0$$

und für virtuelle Verrückungen δx_i und $\delta t = 0$

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki}\delta x_i + f_{k0}\delta t = \sum_{i=1}^{3N} f_{ki}\delta x_i = 0 \;\rightarrow\; \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} f_{ki}\delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki} = 0$$

Wir subtrahieren die 2e von der 1en Gleichung und erhalten

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki} \right) \delta x_i = 0$$

Wählen wir jetzt also $\lambda_1, ..., \lambda_r$ so dass die r *abhängigen* Summanden verschwinden, so müssen auch die restlichen verschwinden da deren Verrückungen unabhängig sind:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki}$$

Lösungsstrategie: Man beginnt mit den $3N$ Lagrange Gleichungen 1. Art

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_{ki}$$

und den r Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki}\dot{x}_i + f_{k0} = 0 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{3N} \left(\dot{f_{ki}}\dot{x}_i + f_{ki}\ddot{x}_i \right) + \dot{f}_{k0} = 0,\; k = 1, ..., r$$

und löst das aus den $3N + r$ Gleichungen resultierende Gleichungssystem. Dies macht sich am besten indem man die Beschleunigungen $\dot{x}_i$ in die *abgeleiteten* Nebenbedingungen einsetzt und daraus die r Lagrange Multiplikatoren λ_k gewinnt. Aus diesen ergeben sich dann schliesslich die $3N$ Bewegungsgleichungen $\ddot{x}_i = f\left(x_1, .., x_{3N}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_{3N}, t\right)$, d.h $3N$ DGL 2. Grades, die gegebenfalls zu lösen sind.

Aufgabe 02

Feld 1

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + dy \\ by + ex \\ cz \end{pmatrix}$$

a) Es muss gelten:

$$\begin{aligned} e = \partial_x F_y &= \partial_y F_x = d \\ 0 = \partial_z F_x &= \partial_x F_z = 0 \\ 0 = \partial_z F_y &= \partial_y F_z = 0 \end{aligned}$$

also schlicht und einfach $e(t) = d(t)$.

b) **Potential:**

$$U = U_0 - \int_{x_0}^{x} F_x(\xi, y_0, z_0)\; d\xi - \int_{y_0}^{y} F_y(x, \xi, z_0)\; d\xi - \int_{z_0}^{z} F_z(x, y, \xi)\; d\xi$$

$$= U_0 - \int_{x_0}^{x} (a\xi + dy_0)\; d\xi - \int_{y_0}^{y} (b\xi + ex)\; d\xi - \int_{z_0}^{z} c\xi\; d\xi$$

$$= U_0 - \frac{ax^2}{2} - dy_0 x + \frac{ax_0^2}{2} + dy_0 x_0 - \frac{by^2}{2} - exy + \frac{by_0^2}{2} + exy_0 - \frac{cz^2}{2} + \frac{cz_0^2}{2}$$

Unter der Bedingung $e = d$ und der Eichung $U_0 = 0,\ x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ergibt sich ein Potential

$$U = -\frac{ax^2}{2} - \frac{by^2}{2} - \frac{cz^2}{2} - exy$$

c) Energieerhaltung gilt insofern das Potential $\forall x, y, z$ zeit-unabhängig ist, d.h a, b, c, d und e sind Konstanten, da x, y, z frei gewählt werden können!

d) Ein konservatives Zentralkraftfeld ergibt sich wenn also $e = d$ und a, b, c, d konstanten sind, und ferner gilt

$$\vec{F} \parallel \vec{r},\ \vec{r} \neq 0 \ \to \ \begin{pmatrix} ax + dy \\ by + ex \\ cz \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\to \ \lambda = a + d\frac{y}{x} = b + e\frac{x}{y} = c \ \to \ a = b = c,\ d = e = 0 \ \to \ U = -\frac{a}{2} \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

e) Da es sich um konservative Zentralkraftfelder handelt ist das Potential nur vom Abstand vom Ursprung abhängig, also $U = U(r)$. Die Arbeit ergibt sich als

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{\nabla} U \ d\vec{r} = U(r_1) - U(r_1) = 0$$

Feld 2

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix},\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a) Es muss $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ gelten, also

$$\begin{aligned} -\frac{bxy}{r^3} &= \partial_x F_y = \partial_y F_x = -\frac{axy}{r^3} \ \to \ a = b \\ -\frac{axz}{r^3} &= \partial_z F_x = \partial_x F_z = -\frac{cxz}{r^3} \ \to \ a = c \\ -\frac{byz}{r^3} &= \partial_z F_y = \partial_y F_z = -\frac{cyz}{r^3} \ \to \ b = c \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{F} = a \cdot \frac{\vec{r}}{r} = a \cdot \vec{e}_\rho$$

b) **Potential:** Ansatz: $U = ar$. Probe:

$$\partial_x U = \frac{ax}{r},\ \partial_y U = \frac{ay}{r},\ \partial_z U = \frac{az}{r} \quad \square$$

c) Energieerhaltung gilt so lange $\partial_t U = 0$ d.h $a = const$.

d) Für $a = b = c = const$ ergibt sich automatisch ein konservatives Zentralkraftfeld.

e) Analog zu vorhin ergibt sich eine gesamte Arbeit $W = 0$.

Aufgabe 03

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &\rho := r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct^n,\ g_1 := r - ct^n = 0,\ g_2 := z = 0 = const \\ &\to \ \dot{\rho} = nct^{n-1},\ \ddot{\rho} = n(n-1)ct^{n-2},\ \ddot{z} = 0 \\ &\delta\rho = \delta z = 0 \end{aligned}$$

Eingeprägte Kräfte

$$\vec{F} = -gm \cdot \vec{e}_z$$

wobei m die Masse des Massenpunktes und g die Beschleunigung im homogenen Schwerefeld der Erde seien.

Anfangsbedingungen Sei $\vec{r}_0 = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y$ bzw. $(\rho_0, \varphi_0, 0)$ die Anfangsposition im Zeitpunkt $t_0 > 0$ des MP in kartesischen bzw. Zylinderkoordinaten. Analog sei $\dot{\vec{r}}_0 = v_{x_0}\vec{e}_x + v_{y_0}\vec{e}_y = v_{\rho_0}\vec{e}_\rho + v_{\varphi_0}\vec{e}_\varphi$ seine Anfangsgeschwindigkeit.

a) **D'Alembert**

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} \right) \cdot \delta\vec{r} = \left[m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + m\ddot{z} \cdot \vec{e}_z + mg \cdot \vec{e}_z\right] \cdot (\delta\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\delta\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \delta z \cdot \vec{e}_z) = 0$$

$$\rightarrow\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \rho\delta\varphi = 0 \ \rightarrow\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \ \rightarrow\ \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\rho} = -\frac{2n\dot{\varphi}}{t}$$

b) **Lagrange I**

$$m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + m\ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \vec{F} + \lambda_1 \cdot \nabla g_1 + \lambda_2 \cdot \nabla g_2 = -mg\vec{e}_z + \lambda_1\vec{e}_\rho + \lambda_2\vec{e}_z$$

$$\lambda_1 = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right),\ \ddot{z} = 0 \ \rightarrow\ \lambda_2 = mg$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 \ \rightarrow\ \ddot{\varphi} = -\frac{2n\dot{\varphi}}{t}$$

c) **Lagrange II**

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{mc^2}{2} \cdot \left(n^2t^{2n-2} + t^{2n}\dot{\varphi}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(mc^2t^{2n}\dot{\varphi}\right)}_{L_z} = mc^2 \cdot \left(2nt^{2n-1}\dot{\varphi} + t^{2n}\ddot{\varphi}\right) = 0$$

$$\rightarrow\ \ddot{\varphi} = -\frac{2n\dot{\varphi}}{t}$$

d) **Hamilton**

$$p_\varphi := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mc^2t^{2n}\dot{\varphi} = L_z \ \rightarrow\ \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mc^2t^{2n}}$$

$$\mathcal{H} = p_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{L_z^2}{2mc^2t^{2n}} - \frac{mc^2n^2t^{2n-2}}{2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial L_z} = \frac{L_z}{2mc^2t^{2n}},\ \dot{L}_z = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \ \rightarrow\ L_z = const$$

e) **Lösen der Bewegungsgleichungen**

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{2mc^2t^{2n}} \ \rightarrow\ \varphi = \varphi_0 + \frac{L_z}{2mc^2} \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{du}{u^{2n}} = \varphi_0 + \frac{L_z}{2mc^2(1-2n)} \cdot \left(t^{1-2n} - t_0^{1-2n}\right)$$

$$L_z = mc^2t_0^{2n}v_{\varphi_0} \ \rightarrow\ \varphi = \varphi_0 + \frac{t_0^{2n}v_{\varphi_0}}{2(1-2n)} \cdot \left(t^{1-2n} - t_0^{1-2n}\right)$$

f) **Zwangskraft**

$$\vec{F}^* = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\cdot\vec{e}_\rho + \underbrace{m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})}_{0}\cdot\vec{e}_\varphi + \underbrace{m\ddot{z}}_{0}\cdot\vec{e}_z + mg\cdot\vec{e}_z$$

$$= m\cdot\left(n(n-1)ct^{n-2} - \frac{ct_0^{4n}v_{\varphi_0}^2}{4t^{3n}}\right)\cdot\vec{e}_\rho + mg\cdot\vec{e}_z$$

Aufgabe 04

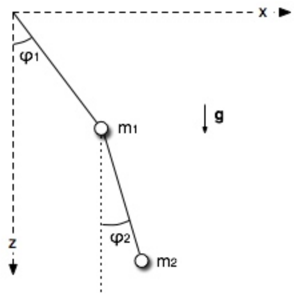
Bedingungen

Verwenden Polarkoordinaten für Masse m_1 und verschobene Polarkoordinaten für Masse m_2. Generalisierte Koordinaten seien die Winkel φ_1 und φ_2 die m_1 und m_2 jeweils mit der Z-Achse bilden. Seien φ_{1_0} und φ_{2_0} die Anfangswerte dieser beiden Winkel, und $\eta_1 := \dot{\varphi}_1(t=0)$ und $\eta_2 := \dot{\varphi}_2(t=0)$. Die jeweiligen Positionen der beiden Massen ergeben sich als

$$z_1 = l\cos\varphi_1,\ z_2 = z_1 + l\cos\varphi_2 = l(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

$$x_1 = l\sin\varphi_2,\ x_2 = x_1 + l\sin\varphi_2 = l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)$$

wobei die X-Achse in der durch die beiden Pendel aufgespannten Ebene und senkrecht zur Erdbeschleunigung liegt.



a) **Lagrange**

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1}{2}\cdot\left(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\cdot\left(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) + m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$= \frac{m_1 l^2}{2}\cdot\left(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\varphi_1 + \dot{\varphi_1}^2\sin^2\varphi_1\right) + \frac{m_2 l^2}{2}\cdot\left[(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2)^2 + (\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\sin\varphi_2)^2\right]$$
$$+ lg\cdot[(m_1+m_2)\cos\varphi_1 + m_2\cos\varphi_2]$$

$$= \frac{m_1 l^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 l^2}{2}\cdot\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) + lg\cdot[(m_1+m_2)\cos\varphi_1 + m_2\cos\varphi_2]$$

b) **Bewegungsgleichungen**

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_1} = l^2\cdot\left[(m_1+m_2)\ddot{\varphi}_1 + m_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] + lg(m_1+m_2)\sin\varphi_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_2} = m_2 l^2\cdot\left[\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] + lgm_2\sin\varphi_2$$

Linearisierung: $\sin\varphi_1 \approx \varphi_1,\ \sin\varphi_2 \approx \varphi_2,\ \cos(\varphi_1-\varphi_2)\approx 1,\ \sin(\varphi_1-\varphi_2)\approx 0$

$$l^2\cdot\left[(m_1+m_2)\ddot\varphi_1+m_2\ddot\varphi_2\right]+lg(m_1+m_2)\varphi_1=0 \ \Rightarrow\ \ddot\varphi_1=-\frac{g}{l}\cdot\varphi_1-\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\cdot\ddot\varphi_2$$

$$m_2l^2\left(\ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2\right)+lgm_2\varphi_2=0\ \Rightarrow\ \ddot\varphi_2=-\frac{g}{l}\cdot\varphi_2-\ddot\varphi_1$$

$$\rightarrow\ \ddot\varphi_1=-\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}\cdot\varphi_1+\frac{gm_2}{lm_1}\cdot\varphi_2,\ \ddot\varphi_2=\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)$$

c) Ansatz:

$$\vec\varphi:=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=e^{i\omega t}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=e^{i\omega t}\cdot\vec A$$

Einsatz:

$$A_1\cdot\left[\omega^2-\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}\right]+A_2\cdot\frac{gm_2}{lm_1}=0$$

$$A_1\cdot\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}+A_2\cdot\left[\omega^2-\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}\right]=0$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\omega^2-\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} & \frac{gm_2}{lm_1}\\ \frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} & \omega^2-\frac{g(m_1+m_2)}{lm_1}\end{pmatrix}}_{C}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=0$$

Diagonalisierung:

$$\det(C)\overset{!}{=}0\ \rightarrow\ \omega_{1,2}=\left\{\frac{g}{lm_1}\cdot\left[(m_1+m_2)\pm\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right]\right\}^{1/2}$$

$$\rightsquigarrow\ \vec A_1=\Phi_1\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}\end{pmatrix},\ \vec A_2=\Phi_2\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}\end{pmatrix},\ \Phi_1,\Phi_2\in\mathbb{R}$$

d) **Allgemeine Lösung**

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\Phi_1\cos(\omega_1t+\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}\end{pmatrix}+\Phi_2\cos(\omega_2t+\alpha_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}\end{pmatrix},\ \Phi_1,\Phi_2,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$