Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Klausur

Dozent: Prof. D.-G. Welsch

31 Juli, 2007

Aufgabe 01

25 Punkte

a) Geben Sie eine verbale und eine exakte mathematische Formulierung des d'Alembert-Prinzips für ein System von N Massenpunkten mit r (bilateralen) Nebenbedingungen, und erläutern Sie (stichpunktartig) alle verwendeten Größen.

b) Welche verschiedenen Typen von Nebenbedingungen gibt es?

c) Leiten Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art für ein System von N Massenpunkten mit r anholonomen Nebenbedingungen her, und skizzieren Sie eine Lösungsstrategie.

Aufgabe 02

15 Punkte

a) Unter welchen Bedingungen an die Funktionen $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t)$ besitzen die folgenden (auf einen Massenpunkt wirkenden) Kraftfelder ein Potential?

- $$\vec{F}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} a(t)x + d(t)y \\ b(t)y + e(t)x \\ c(t)z \end{pmatrix}$$

- $$\vec{F}(\vec{r},t) = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} a(t)x \\ b(t)y \\ c(t)z \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential, und machen Sie die Probe.

c) Unter welchen Bedingungen gilt Energieerhaltung?

d) Unter welchen Bedingungen ergeben sich konservative Zentralkraftfelder?

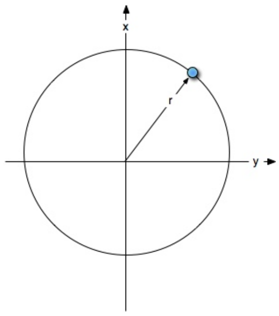
e) Bestimmen Sie für diesen Fall die an einem Massenpunkt verrichtete Arbeit längst des Weges $\mathcal{C}$ wobei dieser in Kugelkoordinaten die folgenden drei Abschnitte umfasst:

- $\vartheta = \vartheta_1,\ \varphi = \varphi_1,\ r_1 \le r \le r_2$
- $\vartheta = \vartheta_1,\ r = r_2,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$
- $\vartheta = \vartheta_1,\ \varphi = \varphi_2,\ r_1 \le r \le r_2$

Aufgabe 03

20 Punkte

Auf einer kreisförmigen (als masselos anzusehende) Schiene in der parallel zur Erdoberfläche befindlichen Ebene befindet sich ein Massenpunkt, der sich dort reibungsfrei bewegen möchte. Der Radius der Schiene wächst mit der Zeit, $r = ct^n, n \geq 1, c > 0$.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen durch direkte Auswertung des D'Alembert Prinzips auf.

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen in Form der Lagrange Gleichungen 1. Art an.

c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion, und leiten Sie die Bewegungsgleichungen in Form der Lagrange Gleichungen 2. Art her.

d) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion, und leiten Sie die Bewegungsgleichungen in Form der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen her.

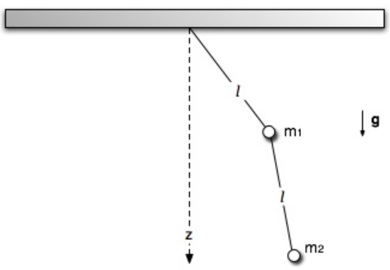
e) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen in der Hamiltonschen Form.

f) Berechnen Sie die Zwangskraft.

Aufgabe 04

17 Punkte

Ein Doppelpendel mit Massen m_1, m_2 und zwei (als masselos und starr anzusehenden) gleichlangen Stangen der Länge l befinde sich im homogenen Schwerefeld der Erde.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf.

b) Treffen Sie die Näherung kleiner Auslenkungen, so dass die Bewegungsgleichungen auf lineare Differentialgleichungen führen.

c) Diagonalisieren Sie (in linearer Näherung) die Lagrange Funktion, d.h bringen Sie sie in die Form für ungekoppelte harmonische Oszillatoren, indem Sie Normalkoordinaten als generalisierte Koordinaten einführen.

d) Drücken Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (in linearer Näherung) mittels der Normalkoordinaten aus.