Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Wiederholungsklausur

Dozent: Prof. D.-G. Welsch

09 Oktober, 2007

Aufgabe 01 (25 Punkte)

a) Was versteht man unter generalisierten Koordinaten, dem Konfigurationsraum und dem Wirkungsintegral?

b) Wie lautet in Worten und in Formeln das Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamilton-Prinzip)?

c) Erlätern Sie an Hand einer kleinen Skizze, welche Bedingungen an das Hamilton-Prinzip geknüpft sind (Art der Variation).

d) Leiten Sie aus dem Hamilton-Prinzip die Lagrange-Gleichungen II. Art her.

Aufgabe 02 (11 Punkte)

a) Für welche Wahl der Konstanten a_i, b_i und c_i $(i = 1, 2, 3)$ besitzt das Kraftfeld

$$\vec{F} = (a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2) \cdot \vec{e}_x + (a_2 x + b_2 y + c_2 z) \cdot \vec{e}_y + c_3 z \cdot \vec{e}_z$$

ein Potential?

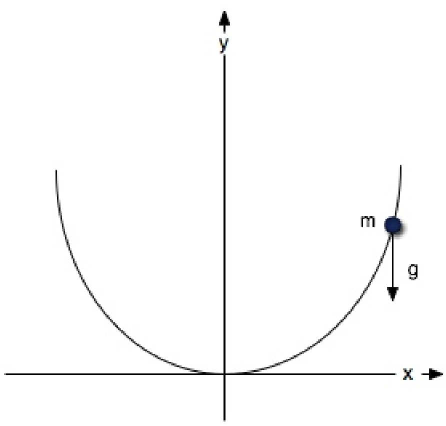
b) Bestimmen Sie für diesen Fall das Potential und formulieren Sie den Energieerhaltungssatz.

Aufgabe 03 (22 Punkte)

a) Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich im homogenen Schwerefeld der Erde reibungsfrei auf einer Parabel

$$y = a_0 x^2 \ (a_0 > 0)$$

in der (x, y)-Ebene senkrecht zur Erdoberfläche (siehe Skizze, $\vec{g}$-Erdbeschleunigung).



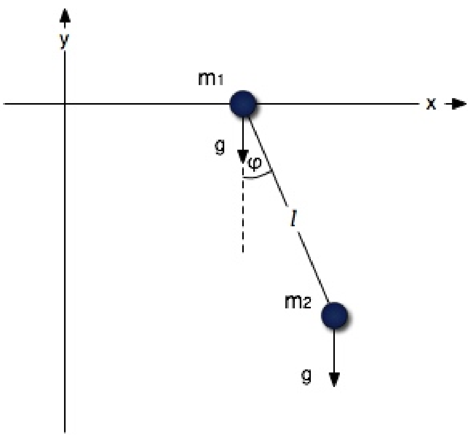
b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen I. Art auf und bestimmen Sie die Zwangskraft als Funktion der Orts, der Geschwindigkeit und gegebenfalls der Zeit.

c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen II. Art auf.

d) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.

Aufgabe 04 (18 Punkte)

An einer massenlosen Stange der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde ist ein Massenpunkt der Masse m_2 angebracht (siehe Skizze, $\vec{g}$-Erdbeschleunigung). Die Stange selbst ist an der Masse m_1 befestigt, die sich nur auf einer Schiene (der x-Achse) reibungsfrei bewegen kann. Die Masse m_2 kann sich in der (x, y)-Ebene senkrecht zur Erdoberfläche bewegen.



Fall A: Die entlang der x-Achse bewegliche Masse m_1 wird geführt und beschreibt eine harmonische Schwingung

$$x_1 = A_0 \cos(\Omega_0 t),\ \ A_0, \Omega_0 : const$$

a) Ermitteln sie die Lagrange-Funktion und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen II. Art auf.

b) Nähern Sie diese für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ und geben Sie die Lösung an.

c) Für welche Ω_0 bricht die Näherung $\varphi \ll 1$ (für alle Zeiten) zusammen? Nutzen Sie das Ergebnis der Aufgabe 4(b).

Fall B: Die entlang der x-Achse bewegliche Masse m_1 wird nicht geführt; die Massenpunkte m_1 (auf der x-Achse) und m_2 (in der (x, y)-Ebene), beide durch die Stange verbunden, werden sich selbst überlassen.

a) Ermitteln Sie die Lagrange-Funktion und stellen Sie die Lagrange Gleichungen II. Art auf.

b) Gibt es zyklische Koordinaten, wenn ja welche, und interpretieren Sie die zugehörigen Erhaltungssätze.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$.