

Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
- Notizen -

Stilianos Louca

31. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Natürliche Koordinaten	3
2	Krummlinige Koordinatensysteme (x^1, x^2, x^3)	3
2.1	Wegstück, Geschwindigkeit, Kinetische Energie & Beschleunigung	3
2.2	Vektor Analysis	4
3	Grundtypen von Bewegung	4
3.1	Geradlinige Bewegung	4
3.2	Kreisbewegung	4
3.3	Harmonischer Oszillator	5
3.3.1	Frei, ungedämpft	5
3.3.2	Frei, gedämpft	5
3.3.3	Erzwungen, ungedämpft	5
3.3.4	Erzwungen, gedämpft	5
4	Fourier-Analyse	6
4.1	Periodische Funktion	6
4.1.1	Reelle Schreibweise	6
4.1.2	Komplexe Schreibweise	6
4.2	Aperiodische Funktion - Fourier Integral	6
5	Dynamik eines Massenpunktes	7
5.0.1	Inertialsystem	7
5.1	Die Newtonschen Axiome	7
5.2	Bewegte Bezugssysteme	7
5.3	Bilanzgleichungen & Erhaltungsgrößen	8
5.3.1	Impulsbilanz	8
5.3.2	Energiebilanz	8
5.4	Konservative Kraftfelder - Energieerhaltung	8
5.4.1	Bedingungen für eine Potentialkraft	9
5.4.2	Drehimpulsbilanz	9
5.5	Integration der Bewegungsgleichungen	9
5.5.1	Eindimensionale Bewegung $x(t)$	9
5.5.2	Dreidimensionale Bewegung $\vec{r}(t)$	10
5.6	Kepler Problem	10
5.6.1	Spezialfall : Ellipsen - Keplerschen Gesetze	11

6	Dynamik eines Massenpunktsystems	12
6.1	Bewegungsgleichungen	12
6.2	Systemgrößen	12
6.3	Bilanzgleichungen & Erhaltungsgrößen	13
6.3.1	Impulsbilanz (Massenmittelpunktsatz)	13
6.3.2	Energiebilanz	13
6.3.3	Drehimpulsbilanz	13
6.3.4	Drehung um eine feste Achse	14
6.3.5	Steinersche Satz	14
6.4	Bewegte Bezugssysteme	14
6.5	Virialsatz	15
6.6	Gekoppelte Schwingungen	15
7	Lagrange Mechanik	17
7.1	Nebenbedingungen	17
7.2	D'Alembertsches Prinzip	17
7.2.1	Virtuelle Verrückung	17
7.2.2	D'Alembertsches Prinzip	18
7.2.3	Prinzip der virtuellen Arbeit	18
7.3	Bilanzgleichungen	18
7.4	Lagrange Gleichungen 1. Art	18
7.5	Lagrange Gleichungen 2. Art	19
7.5.1	Generalisierte Koordinaten	19
7.5.2	Generalisierten Kräfte	19
7.5.3	Lagrange Funktion	20
7.5.4	Generalisierten Impulse	20
7.5.5	Anholonome Nebenbedingungen	20
7.5.6	Mehrdeutig bestimmte Lagrange Funktion	21
8	Kreiseltheorie	22
9	Hamiltonsche Mechanik	23
9.1	Hamiltonsches Prinzip	23
9.2	Hamilton Funktion	23
9.3	Kanonischen (Hamiltonsche) Gleichungen	23
9.4	Weitere Eigenschaften	24
9.5	Poisson-Klammern	24
9.5.1	Definition	24
9.5.2	Eigenschaften	24
9.6	Kanonische Transformationen	25
9.6.1	Hinreichendes Kriterium für kanonische Transformationen	26
9.7	Hamilton-Jacobi-Gleichung	26
10	Herleitungen zwischen den Formalismen	27
10.1	D'Alembert \rightarrow Lagrange I	27
10.2	Lagrange I \rightarrow D'Alembert	27
10.3	D'Alembert \rightarrow Lagrange II	27
10.4	Lagrange II \rightarrow D'Alembert	28
10.5	Lagrange II \rightarrow Hamilton	28
10.6	Hamilton \rightarrow Lagrange II	29
10.7	Hamilton \rightarrow D'Alembert	29

1 Natürliche Koordinaten

- Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}_{\vec{T}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = v\vec{T}$$

- Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{v} \cdot \vec{T} + v \cdot \dot{\vec{T}} = \dot{v} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}, \quad \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|^{-1} = R \frac{d\vec{T}}{ds}$$

2 Krummlinige Koordinatensysteme (x^1, x^2, x^3)

Basisvektoren & Metrischer Tensor

- Kovarianten Basisvektoren

$$\vec{g}_i = \frac{d\vec{r}}{dx^i} = \lambda_i \vec{e}_i$$

$$g_{ik} := \vec{g}_i \cdot \vec{g}_k, \quad g := \det(g_{ik})$$

- Kontravarianten Basisvektoren

$$\vec{g}^i = \nabla x^i, \quad g^{ik} := \vec{g}^i \cdot \vec{g}^k$$

g_{ik} ist Metrischer Tensor. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist g_{ik} eine Diagonalmatrix, und $\vec{g}_i \parallel \vec{g}^i$!

- Levi-Chivita Tensor

$$\varepsilon_{ikl} = \vec{g}_i \cdot (\vec{g}_k \times \vec{g}_l) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^i, x^k, x^l)}$$

2.1 Wegstück, Geschwindigkeit, Kinetische Energie & Beschleunigung

- Allgemein

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$d\vec{r} = \vec{g}_i dx^i = \vec{g}^i dx_i$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}^i \vec{g}_i$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}^i \vec{g}_i + \dot{x}^i \dot{\vec{g}}_i$$

- Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

- Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta + \rho \sin \vartheta \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\vartheta} + 2\dot{\rho} \dot{\vartheta} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \cdot \vec{e}_\vartheta + (\rho \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \vartheta + 2\rho \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)$$

2.2 Vektor Analysis

- Volumenelement

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$$

- Flächenelement

$$d\vec{A}^1 = \vec{g}_2 \times \vec{g}_3 dx^2 dx^3 = \vec{g}^1 \sqrt{g} dx^2 dx^3$$

- Gradient

$$\nabla f = \vec{g}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \vec{g}_i g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

- Divergenz

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} f^i)$$

- Laplace Operator

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

- Rotation

$$\nabla \times f = \vec{g}_i \varepsilon^{ikl} \frac{\partial f_l}{\partial x^k}$$

3 Grundtypen von Bewegung

3.1 Geradlinige Bewegung

Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = const$$

Lösung

$$\vec{r} = \vec{a} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

3.2 Kreisbewegung

Gleichförmige Kreisbewegung : Radius R .

Bahngleichung

$$\vec{r} = R \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + R \sin \omega t \cdot \vec{e}_y = R \cdot \vec{e}_\rho, \quad \omega = \dot{\varphi}$$

Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}} = -R\omega \sin \omega t \cdot \vec{e}_x + R\omega \cos \omega t \cdot \vec{e}_y = R\omega \cdot \vec{e}_\varphi$$

Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}} = -R\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{e}_x - R\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{e}_y = -\omega^2 \cdot \vec{r} = -R\omega^2 \cdot \vec{e}_\rho$$

3.3 Harmonischer Oszillator

3.3.1 Frei, ungedämpft

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Allgemeiner Lösungsansatz

$$x = e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad x = \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Allgemeine Lösung

$$x = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} \cong X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

3.3.2 Frei, gedämpft

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \beta > 0$$

Allgemeiner Lösungsansatz

$$x = e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad x = e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Allgemeine Lösung

- Kriechfall: $\beta > \omega_0$

$$x = e^{-\beta t} \cdot \left(A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) \cong C e^{-\beta t} \cosh\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t + \varphi\right)$$

- Aperiodischer Grenzfall $\beta = \omega_0$

$$x = e^{-\beta t} \cdot (A_1 + tA_2)$$

- Schwingfall $\beta < \omega_0$

$$x = e^{-\beta t} \cdot (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \cong X_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Für $\beta \ll \omega_0$ kann $x(t)$ als harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω aufgefasst werden, deren Amplitude $X_0 e^{-\beta t}$ mit wachsender Zeit exponentiell gedämpft wird $\rightarrow \beta$: Dämpfungskonstante.

Verhältnis zweier aufeinander folgender maximaler Auslenkungen (Amplituden) auf der gleichen Seite:

$$p := \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{e^{-\beta n T}}{e^{-\beta(n+1)T}} = e^{\beta T} \rightarrow \beta = \frac{1}{T} \cdot \ln \left| \frac{x_n}{x_{n+1}} \right|$$

3.3.3 Erzwungen, ungedämpft

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

Allgemeiner Lösungsansatz

$$x_h = e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad x_p = F_0 \cos \Omega t$$

Allgemeine Lösung

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cdot \cos \Omega t$$

3.3.4 Erzwungen, gedämpft

Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \cong f_0 e^{i(\omega t + \vartheta)}, \quad f_0 \in \mathbb{R}$$

Allgemeiner Lösungsansatz

$$x_h = e^{\lambda t} \quad \text{bzw.} \quad x_p = F_0 e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad F_0 \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung (für $\beta < \omega_0$)

$$x = \underbrace{e^{-\beta t} \cdot (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})}_{x_h} + \underbrace{F_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}}_{x_p}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad F_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}, \quad \varphi = \vartheta + \arctan \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Da wegen der Dämpfung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$$

folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$$

4 Fourier-Analyse

4.1 Periodische Funktion

Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Periodizitätsintervall T

4.1.1 Reelle Schreibweise

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \right\}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt, \quad n \neq 0, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt$$

4.1.2 Komplexe Schreibweise

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega n t}, \quad \omega := \frac{2\pi}{T}, \quad A_n \in \mathbb{C}$$

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-i\omega n t} dt$$

Es gilt: $A_{-n} = A_n^*$

4.2 Aperiodische Funktion - Fourier Integral

Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad g(\omega) \in \mathbb{C}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$g(\omega)$ nennt man die *Spektralfunktion* oder *Fouriertransformierte* von f . Man schreibt oft $\mathcal{F}(f) = g$ bzw. $\mathcal{F}(f)(\omega) = g(\omega)$

Eigenschaften

- Antisymmetrie

$$g(\omega) = g^*(-\omega)$$

- Translation

$$\mathcal{F}(f(t - t_0))(\omega) = g(\omega) \cdot e^{-i\omega t_0}$$

- Dehnung

$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{a} g\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5 Dynamik eines Massenpunktes

5.0.1 Inertialsystem

Ein Bezugssystem, in dem sich ein sich völlig selbst überlassener (*kräftefreier*) Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung befindet, nennt man *Inertialsystem*.

Ist ein System Σ ein Inertialsystem, dann ist auch jedes System Σ_* , das relativ zu Σ eine unbeschleunigte Translationsbewegung ausführt, ein Inertialsystem (Galileisches Relativitätsprinzip).

5.1 Die Newtonschen Axiome

- Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen Linie, in der die Kraft wirkt. Unter Bewegung ist die Bewegungsgröße, d.h. der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ zu verstehen:

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \cong \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Wirkt auf einen Massenpunkt also keine Kraft, so ruht er bzw. bewegt sich im Raum mit konstanter Geschwindigkeit.

- Reaktionsprinzip: Die von einem Massenpunkt auf einen zweiten Massenpunkt ausgeübte Kraft \vec{F}_{21} ist gleich groß und entgegengesetzt der Kraft \vec{F}_{12} die der zweite Massenpunkt auf den ersten Massenpunkt ausübt, d.h.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

5.2 Bewegte Bezugssysteme

Betrachten: Inertialsystem Σ und bewegtes, rotierendes ($\vec{\omega}$) Bezugssystem Σ_* : $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_*$.

- Allgemeine Vektortransformation: Für jeden beliebigen Vektor \vec{b} gilt

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d^*\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

Der Ausdruck d^* bedeutet dass die Differentiation bzgl. der rotierenden Basisvektoren durchzuführen ist, d.h. diese werden als konstant betrachtet!

- Geschwindigkeit im Σ_*

$$\dot{\vec{r}}_* = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0 - \vec{\omega} \times \vec{r}_*$$

Der Ausdruck

$$\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_*$$

heißt *Führungsgeschwindigkeit*

- Beschleunigung im Σ_*

$$\ddot{\vec{r}}_* = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0 - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_* - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_*) + 2\dot{\vec{r}}_* \times \vec{\omega}$$

Die Größe $2\dot{\vec{r}}_* \times \vec{\omega}$ bzw. $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_*)$ wird *Coriolisbeschleunigung* bzw. *Zentrifugalbeschleunigung* genannt. Ferner gilt also:

$$m\ddot{\vec{r}}_* = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_* - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_*) + 2m\dot{\vec{r}}_* \times \vec{\omega}$$

Die vier außer der Kraft \vec{F} auf der rechten Seite auftretenden Glieder sind die so genannten *Scheinkräfte*. Die einzige *wirklich* wirkende Kraft ist \vec{F} , sie wird auch als *eingepürgte* Kraft bezeichnet.

5.3 Bilanzgleichungen & Erhaltungsgrößen

5.3.1 Impulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ ist gleich der einwirkenden [Gesamt-]Kraft. Also

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = \text{const}$$

5.3.2 Energiebilanz

Die Größe

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

heißt *kinetische Energie*. Die durch die Bewegung eines Massenpunktes entlang einer Kurve C definierte Größe

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

heißt die entlang des Weges durch die Kraft \vec{F} verrichtete Arbeit. Es gilt für zwei Punkte P_1, P_2

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} =: P \Rightarrow T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Leistung der einwirkenden [Gesamt-]Kraft.

5.4 Konservative Kraftfelder - Energieerhaltung

Eine Kraft heißt konservativ wenn

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

und sie eine *Potentialkraft* ist, d.h es gibt eine skalare Funktion $U(\vec{r})$ derart dass

$$\vec{F} = F_i \vec{g}^i = -\nabla U(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \cdot \vec{g}^i \rightarrow F_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$$

gilt. Im Falle eines konservatives Kraftfelds gilt

$$\frac{dT}{dt} = P = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\nabla U \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = -\frac{dU}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

Die Größe $E := T + U$ ist die *Gesamtenergie* bzw. *mechanische Energie* des Massenpunktes. Sind also alle Kräfte konservativ, so gilt **Energieerhaltung**.

Ist \vec{F} zeitabhängig (also nicht konservativ, jedoch eine Potentialkraft) so gilt

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Allgemein bezeichnet man nicht konservative Kräfte als *dissipative* Kräfte. Teilt man die Kraft in konservative und dissipative Kräfte auf, so gilt

$$\frac{d}{dt}(T + U) = P^{(diss)} = \vec{F}^{(diss)} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Für einen beliebigen Weg $C : P_1 \rightarrow P_2$ und einer Potentialkraft \vec{F} gilt:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\int_{P_1}^{P_2} dU = U_1 - U_2$$

5.4.1 Bedingungen für eine Potentialkraft

Es gilt

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ Potentialkraft}$$

Beweis: "⇐": Für beliebige Flächen A gilt

$$\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow 0 = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$$

Andere Richtung: "⇒", also haben $\nabla \times \vec{F} = 0$: Definieren:

$$U(\vec{r}) := U_0 - \int_{x_0}^x F_x(\xi, y_0, z_0) d\xi - \int_{y_0}^y F_y(x, \xi, z_0) d\xi - \int_{z_0}^z F_z(x, y, \xi) d\xi$$

und beweisen dass U die Bedingung für eine Potentialfunktion erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -F_x(x, y_0, z_0) - \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, \xi, z_0) d\xi - \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial x} F_z(x, y, \xi) d\xi \\ &= -F_x(x, y_0, z_0) - \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial \xi} F_x(x, \xi, z_0) d\xi - \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial \xi} F_x(x, y, \xi) d\xi \\ &= -F_x(x, y_0, z_0) - (F_x(x, y, z_0) - F_x(x, y_0, z_0)) - (F_x(x, y, z) - F_x(x, y, z_0)) = -F_x(x, y, z) \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z(x, y, z) \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U \quad \square$$

5.4.2 Drehimpulsbilanz

Man definiert den Drehimpuls \vec{L} eines Massenpunktes bzgl. eines Ursprungs O wie folgt:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Es gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{M}$$

Die Größe \vec{M} nennt man das *Drehmoment*. Ist $\vec{M} = 0$ so gilt Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Ist $\vec{L} = \text{const}$ so gilt $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$. Die Bewegung erfolgt also stets auf der Ebene zu der \vec{L} senkrecht steht. Diese Ebene wird **Invariante Ebene** genannt.

Flächensatz: Das (vektorielle) Flächenelement $d\vec{A}$, das von \vec{r} und $d\vec{r}$ (in der Invarianten Ebene) aufgespannt wird ist

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$

Gilt Drehimpulserhaltung, so folgt für die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const}$$

5.5 Integration der Bewegungsgleichungen

5.5.1 Eindimensionale Bewegung $x(t)$

Energieerhaltung liefert:

$$T + U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const} \rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2[E - U(\xi)]/m}}$$

Beschränktheit der Bewegung: Es muss stets gelten $U \leq E \forall t$. Also unbeschränkt (infini) falls $E > U(x) \forall x$. Grenzen der Bewegung: $U(x_0) = E \rightarrow \dot{x} = 0$

5.5.2 Dreidimensionale Bewegung $\vec{r}(t)$

Drehimpulserhaltung: $\vec{L} = \text{const} \rightarrow$ Bewegung auf der Invarianten Ebene, o.B.d.A XY Ebene, also $\dot{z} = 0 \rightarrow$ Wählen Polarkoordinaten $(\rho, \varphi) \rightarrow m\rho^2\dot{\varphi} = L = \text{const}$. Ferner: $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_\rho$.

Energieerhaltung:

$$E = T + U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\rho) = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \underbrace{\left(U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)}_{U_{eff}(\rho)}$$

Zurückführung auf eindimensionalen Fall:

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{eff}(\rho)]} \rightarrow t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\sqrt{2[E - U_{eff}(\xi)]/m}} \rightsquigarrow \rho = \rho(t)$$

Winkel φ :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{dt}{d\varphi} \frac{d\rho}{dt} = \frac{m\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{eff}(\rho)]} \rightarrow \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{2[E - U_{eff}(\xi)]/m}} \rightsquigarrow \varphi = \varphi(\rho) \rightsquigarrow \varphi = \varphi(t)$$

Bewegungsgrenzen:

$$\dot{\rho} = 0 \rightarrow U_{eff}(\rho) = E$$

Im Fall einer anziehenden Zentralkraft, kann der Massenpunkt nur "reinfallen" falls auch für $\rho \rightarrow 0$ stets gilt $U_{eff}(\rho) \leq E$ also

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \right\} \leq E$$

d.h die potentielle Energie $U(\rho)$ muss *schnell genug* gegen $-\infty$ gehen:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 U(\rho) \leq -\frac{L^2}{2m}$$

also $U(\rho)$ muss mindestens so schnell wie $-\frac{1}{\rho^2}$ gegen $-\infty$ streben.

5.6 Kepler Problem

Betrachten zwei Massenpunkte m, M im gegenseitigen Gravitations-Einfluss, $M \gg m$. Nehmen also an: Masse M bleibt still und setzen Koordinatenursprung ins Zentrum von M .

Effektives Potential:

$$U_e(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}, \quad U(\rho) = -\frac{GMm}{\rho}$$

Minimum von U_e :

$$\rho_0 = k = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

Exzentrizität:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ek}{GmM}}$$

Umkehrpunkte:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{k} (1 \pm \varepsilon)$$

Einschränkung der Bewegung: Es muss gelten $U_e(\rho) \leq E$.

- Falls $E \geq 0$ bzw. $\varepsilon \geq 1 \rightarrow$ infinite Bewegung
- Falls $E < 0$ bzw. $\varepsilon < 1 \rightarrow$ finite Bewegung

Bahnkurve: Sei $\varphi = 0$ für $\rho = \rho_{min}$, dann ergibt sich die Bahnkurve als ein Kegelschnitt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{k} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

Art der Kurve:

- $\varepsilon = 0$: Kreis
- $0 < \varepsilon < 1$: Ellipse
- $\varepsilon = 1$: Parabel
- $\varepsilon > 1$: Hyperbel

5.6.1 Spezialfall : Ellipsen - Keplerschen Gesetze

Große Halbachse

$$a = \frac{GmM}{2|E|}$$

Kleine Halbachse

$$b = \frac{|L|}{\sqrt{2m|E|}}$$

Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi mab}{|L|} = \pi GmM \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{|E|^{3/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{GM}} \cdot a^{3/2}$$

Keplerschen Gesetze:

- Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- Für zwei Planeten der Masse m_1 und m_2 auf elliptischen Bahnen um die Sonne gilt für die Umlaufzeiten T_1, T_2 und die großen Halbachsen a_1, a_2 :

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

- Der Fahrstrahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Lenzschher Vektor: Lenzscher Vektor: Zeigt vom Kraftzentrum zum Perihel

$$\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{mMG} - \frac{\vec{r}}{r}$$

Eigenschaften:

$$\dot{\vec{\Lambda}} = 0 \rightarrow \vec{\Lambda} = const$$

$$\vec{\Lambda} \cdot \dot{\vec{r}} = -\dot{r}$$

$$|\vec{\Lambda}| = \varepsilon$$

6 Dynamik eines Massenpunktsystems

6.1 Bewegungsgleichungen

Betrachten N Massenpunkte $\rightarrow 3N$ Differenzialgleichungen 2.Ordnung:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Aufteilung der auf die Massenpunkte wirkenden Kräfte in **innere** und **äußere** Kräfte:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}$$

und gegebenenfalls Annahme dass alle inneren Kräfte Zentralkräfte sind (notwendig für Drehimpulserhaltung).

6.2 Systemgrößen

- Schwerpunkt (oder Massenmittelpunkt):

$$\vec{r}_c := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad m := \sum_{i=1}^N m_i$$

- Impuls

$$\vec{p} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$$

- Drehimpuls

$$\vec{L} := \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

- Drehmoment

$$\vec{M} := \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

- Kinetische Energie

$$T := \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

- Potentielle Energie (innerer und äußerer Kräfte)

$$U := \sum_{i=1}^N U_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{(in)} + \sum_{i=1}^N U_i^{(ext)} \rightarrow \vec{F}_i = - \sum_{j=1}^N \nabla U_{ij}^{(in)} - \nabla U_i^{(ext)} \cong -\nabla_i U$$

- Leistung

$$P := \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

6.3 Bilanzgleichungen & Erhaltungsgrößen

6.3.1 Impulsbilanz (Massenmittelpunktsatz)

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N F_i^{(ext)}}_{\vec{F}^{(ext)}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}^{(in)} = \vec{F}^{(ext)} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{ij} \vec{F}_{ij} + \sum_{ij} \vec{F}_{ji} \right) = \vec{F}^{(ext)} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{ij} \underbrace{\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right)}_0 = \vec{F}^{(ext)}$$

$$\vec{F}^{(ext)} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_c) = m \dot{\vec{r}}_c \rightarrow m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}^{(ext)}$$

Der Massenmittelpunkt eines Massenpunktsystems bewegt sich so, als ob in ihm die gesamte Masse des Systems vereinigt wäre und an ihm die Resultante aller äußeren Kräfte wirkte.

Spezialfall: Homogenes Schwerfeld:

$$\vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} = m \vec{g}$$

6.3.2 Energiebilanz

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = P$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie eines Massenpunktsystems ist gleich der Gesamtleistung, d.h der Leistung aller am System angreifenden Kräfte. Sind die Kräfte Potentialkräfte, so dass gilt

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U$$

so folgt

$$P = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \nabla_i U \cdot \dot{\vec{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i^j} \frac{dx_i^j}{dt} = - \frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt} (T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Ist die Kraft nicht zeitabhängig also konservativ, so gilt **Energieerhaltung** für das ganze System. Teilt man die Kräfte in konservative und dissipative Kräfte auf, so gilt

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_{i=1}^N F_i^{(diss)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = P^{(diss)}$$

Allgemein können die dissipativen Kräfte als äußere Kräfte angesehen werden. Ist ein System abgeschlossen, so gilt im allgemeinen Energieerhaltung.

6.3.3 Drehimpulsbilanz

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}}_{\vec{M}^{(ext)}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \\ &= \vec{M}^{(ext)} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \vec{M}^{(ext)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \end{aligned}$$

Nimmt man an dass die zwischen den Massenpunkten wirkenden Kräfte Zentralkräfte sind, also $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ dann gilt $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ also

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(ext)}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Massenpunktsystems ist gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte, wenn die inneren Kräfte Zentralkräfte sind. Ist $\vec{M}^{(ext)} = 0$ so gilt **Drehimpulserhaltung** $\vec{L} = const.$ Die zum konstanten Gesamtdrehimpuls senkrecht stehende Ebene wird **invariable Ebene** genannt.

Spezialfall: Homogenes Schwerfeld: $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

$$\vec{M}^{(ext)} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = m \vec{r}_c \times \vec{g}$$

6.3.4 Drehung um eine feste Achse

Betrachten die Drehung eines Systems um eine feste Achse (z). In Zylinderkoordinaten lautet dann die Komponente von \vec{L} in Richtung der Drehachse:

$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i \varrho_i^2 \dot{\varphi}_i$$

Im Falle eines starren Körpers ist $\forall i, j : \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_j =: \omega$ und $\dot{\varrho}_i = \dot{z}_i = 0$. Mit

$$\Theta := \sum_{i=1}^N m_i \varrho_i^2$$

bzw.

$$\Theta := \int \varrho^2 dm$$

als dem so genannten **Trägheitsmoment** erhält man

$$L_z = \Theta \omega$$

Die Größe

$$T_r := \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{r}}_i)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\varrho \omega)^2 = \frac{\Theta}{2} \omega^2$$

ist die **Rotationsenergie** des Körpers.

6.3.5 Steinersche Satz

Sind Θ_c und Θ die Trägheitsmomente des Körpers bzgl. zweier im Abstand ϱ_c liegenden paralleler Achsen, wobei die erste durch den Schwerpunkt verläuft, so gilt

$$\Theta = \Theta_c + m \varrho_c^2$$

6.4 Bewegte Bezugssysteme

Betrachten neuen Bezugspunkt O_* :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_{i*}$$

- Kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{r}}_0 \right|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{i*} \right|^2 + m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_{c*}$$

Liegt der Bezugspunkt im Schwerpunkt des Systems, also $\vec{r}_0 = \vec{r}_c \rightarrow \dot{\vec{r}}_{c*} = 0$ so gilt

$$T = \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{r}}_c \right|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left| \dot{\vec{r}}_{i*} \right|^2$$

- Drehimpuls

$$\vec{L}_* = \vec{L} - \vec{r}_0 \times \vec{p} - m(\vec{r}_c - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}}_0$$

$$\frac{d\vec{L}_*}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \dot{\vec{r}}_0 \times \frac{d\vec{p}}{dt} - m(\vec{r}_c - \vec{r}_0) \times \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{M}_*^{(ext)} - m(\vec{r}_c - \vec{r}_0) \times \ddot{\vec{r}}_0, \quad \vec{M}_*^{(ext)} = \vec{M}^{(ext)} - \vec{r}_0 \times \dot{\vec{p}}$$

Wird O_* als der Schwerpunkt gewählt, oder ist $\ddot{\vec{r}}_0 = 0$, so folgt

$$\frac{d\vec{L}_*}{dt} = \vec{M}_*^{(ext)}$$

Spezialfall: Homogenes Schwerfeld und $\vec{r}_0 = \vec{r}_c$

$$\vec{M}_*^{(ext)} = \vec{M}^{(ext)} - \vec{r}_0 \times \dot{\vec{p}} = m\vec{r}_c \times \vec{g} - \vec{r}_c \times (m\vec{g}) = 0$$

6.5 Virialsatz

Betrachten potentialkräfte $\vec{F}_i = -\nabla_i U$.

Virial des Systems:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(t) := \overline{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \nabla_i U}$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{2T} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \nabla_i U$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right]_{t-T}^{t+T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t+T} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = 2\overline{T} - \mathcal{V}$$

Bleiben die Massenpunkte alle im Endlichen, so verschwindet der linke Ausdruck, und man erhält den **Virialsatz**:

$$2\overline{T} = \overline{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \nabla_i U} = \mathcal{V}$$

Das zeitliche Mittel der kinetischen Energie ist gleich dem halben Virial des Systems. Ist U eine homogene Funktion k -ten Grades ergibt sich

$$2\overline{T} = k\overline{U}$$

Speziell ist für das Newtonsche Gravitationsgesetz $k = -1$ also

$$2\overline{T} = -\overline{U}$$

Aus dem Virialsatz folgt, die Massenpunkte bleiben immer im Endlichen genau dann wenn $E = T + U < 0$.

6.6 Gekoppelte Schwingungen

Betrachten nur **lineare** zusammenhänge von Ort und Kraft.

Vorgehensweise:

- Aufstellen der Bewegungsgleichung für die geeignet gewählten Koordinaten des Systems: $\ddot{x}_i = f_i(\vec{x})$
- Umschreiben der Bewegungsgleichungen in eine Matrix-Gleichung \rightarrow Konstruktion der Koeffizientenmatrix A :

$$\ddot{\vec{x}} = -A \cdot \vec{x}$$

- Aufstellen der Sekulargleichung \rightarrow auffinden der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A . Sind diese positiv so sind deren positive Wurzeln die Eigenfrequenzen des Systems.
- Lösen der n DGL'n 2er Ordnung:

$$\ddot{q}_i = -\lambda_i \cdot q \rightsquigarrow q_i = q_i(t)$$

- Auffinden der zugehörigen (orthogonalen) Eigenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.
- Aufschreiben der allgemeinen Lösung als

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \vec{u}_i$$

7 Lagrange Mechanik

Betrachten N Massenpunkte und deren $3N$ Raumkoordinaten x_1, \dots, x_{3N} :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{3N} \end{pmatrix}$$

7.1 Nebenbedingungen

Die die Bewegungsfreiheit einschränkenden Bindungen können als Nebenbedingungen formuliert werden. r unabhängige Nebenbedingungen erlauben also nur noch $f = 3N - r$ Freiheitsgrade. Die die Bewegungsfreiheit der Massenpunkte entsprechend der vorliegenden Bindungen einschränkten Kräfte \vec{F}^* werden als **Zwangskräfte** bezeichnet. Die auch im Falle eines freien Systems vorliegenden Kräfte \vec{F} werden als **eingeprägte Kräfte** bezeichnet.

- **Holonome Nebenbedingungen** lassen sich in Form von Gleichungen der folgenden Art formulieren:

$$f_k(\vec{x}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad r \leq 3N$$

bzw.

$$df_k = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0$$

- **Anholonome Nebenbedingungen**

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki}(\vec{x}, t) dx_i + f_{k0}(\vec{x}, t) dt = 0$$

Sie sind so beschaffen dass es keine Funktion f_k gibt so dass

$$df_k = \sum_{i=1}^{3N} f_{ki}(\vec{x}, t) dx_i + f_{k0}(\vec{x}, t) dt$$

Die DGL besitzt also keinen integrierenden Faktor!

- **Unilaterale Nebenbedingungen** sind in Form von Ungleichungen ausgedrückt, sie stellen **einseitige Bindungen** dar.
- **Bilaterale Nebenbedingungen** sind in Form von Gleichungen ausgedrückt, stellen also **doppelseitige Bindungen** dar.
- **Skleronome Nebenbedingungen**¹ (holonom oder anholonom) sind NB die nicht explizit von der Zeit abhängen, also

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f_{ki}}{\partial t} = 0, \quad f_{k0} = 0$$

- **Rheonome Nebenbedingungen**² sind NB die explizit von der Zeit abhängen.

7.2 D'Alembertsches Prinzip

7.2.1 Virtuelle Verrückung

Virtuelle Verrückungen sind mit den NB vereinbare, infinitesimal kleine Auslenkungen des Systems, die momentan geschehen sollen, d.h $\delta t = 0$ und damit nur gedacht (virtuell) sind. Sie genügen also den Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i = 0$$

¹Griechisch: *Sklero-Nom* ~ Harte-Regel

²Griechisch: *Rheo-Nom* ~ Fliesende-Regel

7.2.2 D'Alembertsches Prinzip

Zwangskräfte leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit:

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^* \delta x_i \cong \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (m\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Bei Bewegungen von Massenpunkten in vorgegebenen Raumflächen stehen die Zwangskräfte immer senkrecht zu diesen. Im Falle von unilateralen NB ist zu schreiben

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^* \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} (m\ddot{x}_i - F_i) \delta x_i \geq 0$$

Zusammen mit den r NB stellt obere die Ausgangsgleichung zur Bestimmung des Bewegungsablaufs eines Massenpunktsystems dar.

7.2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Ein Massenpunktsystem ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die gesamte virtuelle Arbeit der am System angreifenden eingepprägten Kräfte nicht positiv ist:

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i \cong \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \leq 0$$

7.3 Bilanzgleichungen

Die für freie Systeme geltenden Bilanzgleichungen bzw. Erhaltungssätze gelten auch für gebundene Systeme solange zu den eingepprägten auch die Zwangskräfte hinzugefügt werden.

In der mechanischen Energiebilanz gebundener Systeme spielen im Falle skleronomer NB nur die eingepprägten Kräfte eine Rolle. Besitzen diese ein Potential U so gilt wie für freie Systeme

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Im Falle rheonomer NB gilt im allgemeinen keine Energieerhaltung!

Starrer Körper: Betrachten (gegebenenfalls gebundenen) starren Körper. Teilen Kräfte in äußere eingepprägte ($\vec{F}^{(ext)}$) und äußere Zwangskräfte ($\vec{F}^{(ext*)}$) sowie innere eingepprägte (\vec{F}) und innere Zwangskräfte (\vec{F}^*) ein. Dann leisten die inneren Kräfte (eingepprägte und Zwangskräfte) keinen Beitrag zur Gesamtkraft und dem Gesamtdrehmoment. Beide sind nur durch die äußeren eingepprägten bzw. Zwangskräfte bestimmt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} + \vec{F}^{(ext*)} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ext)} + \vec{M}^{(ext*)}$$

7.4 Lagrange Gleichungen 1. Art

Betrachten bilaterale Nebenbedingungen und suchen r Lagrange Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ so dass, in Übereinstimmung mit den Nebenbedingungen, gilt

$$m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} = 0 \quad \text{bzw.} \quad m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

Man erhält also $3N + r$ Gleichungen zur Bestimmung von $3N + r$ Unbekannten. Durch einsetzen der \ddot{x}_i in die r NB erhält man die r Multiplikatoren. Die Zwangskräfte ergeben sich als

$$F_i^* = m\ddot{x}_i - F_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \quad \text{bzw.} \quad F_i^* = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

Die Leistung P^* der Zwangskräfte ist gegeben durch

$$P^* = \sum_{i=1}^{3N} F_i^* \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \dot{x}_i = \sum_{k=1}^r \left\{ \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \dot{x}_i \right\} = - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{k0} \cong - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

weshalb im Falle von eingepprägten Potentialkräften $\vec{F} = -\nabla U$ gilt

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{k0} \cong \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

Bemerkung: Man kann das ganze verallgemeinern

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^r \nabla_i f_k, \quad i = 1, \dots, N$$

und somit auch andere Koordinaten als Kartesische benutzen! Alle Vektoren sind natürlich dann in die entsprechende Form zu bringen.

7.5 Lagrange Gleichungen 2. Art

7.5.1 Generalisierte Koordinaten

Betrachten $3N$ Massenpunktsystem mit r holonomen Nebenbedingungen bzw. f Freiheitsgraden. Führen **generalisierte Koordinaten** q_1, \dots, q_f ein:

$$\vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}$$

und eine Transformationsvorschrift

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}, t) \cong \vec{x}(q_a, t) \quad \wedge \quad \vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t) \cong \vec{q}(x_i, t)$$

Es gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\sum_{b=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_b} \dot{q}_b + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial x_i}{\partial q_a}$$

7.5.2 Generalisierten Kräfte

Bezeichnen Φ_a als generalisierte Kraft:

$$\Phi_a = \Phi_a(q_a, \dot{q}_a, t) = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a}$$

Für die kinetische Energie $T = T(q_a, \dot{q}_a, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \Phi_a$$

Sind die eingepprägten Kräfte Potentialkräfte d.h. $F_i = -\partial_i U(\vec{x}, t)$ so kann man U als Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit schreiben

$$U = U(q_a, t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_a} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_a} = 0$$

und es gilt

$$\Phi_a = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_a} = - \frac{\partial U}{\partial q_a}$$

7.5.3 Lagrange Funktion

Im Falle von Potentialkräften kann man also schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$$

wobei $\mathcal{L} = T - U$ die **Lagrange Funktion** des Systems ist! Obere f DGL'n 2. Ordnung sind die so genannten *Lagrange Gleichungen*, und stellen f zu lösende Bewegungsgleichungen dar. Im Falle zeitabhängiger Potentialkräfte und skleronomer Bindungen gilt

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Unter *Zyklische Koordinaten* versteht man solche Koordinaten q_b für die gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} = \text{const}$$

Aus zyklischen Koordinaten kommen also Erhaltungsgrößen hervor!

7.5.4 Generalisierten Impulse

Definieren die generalisierten Impulse p_a als

$$p_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \rightarrow \dot{p}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}$$

7.5.5 Anholonome Nebenbedingungen

Sind r holonome und r' anholonome Nebenbedingungen gegeben, so sind erst $f = 3N - r$ generalisierten Koordinaten einzuführen. Zu schreiben wäre dann

$$\sum_{a=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} - \Phi_a \right) \delta q_a = 0$$

bzw. im Falle von Potentialkräften

$$\sum_{a=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) \delta q_a = 0$$

Obere Gleichung wäre dann zusammen mit den r' anholonomen Nebenbedingungs-Gleichungen

$$\sum_{a=1}^f f'_{la} dq_a + f'_{l0} dt = 0$$

zu lösen, wobei f'_{la} und f'_{l0} allgemein Funktionen der f generalisierten Koordinaten sind.

Bemerkung: Gibt es keine holonomen NB also $f = 3N$ "generalisierten Koordinaten" so geht das ganze in das d'Alembertsche Prinzip über.

Variante: Das ganze kann auch in Form von Lagrange Gleichungen 1. Art aufgeschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \Phi_a + \sum_{l=1}^{r'} \lambda_l f_{la}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \sum_{l=1}^{r'} \lambda_l f_{la}$$

Obere wird dann zusammen mit den r' NB gelöst.

7.5.6 Mehrdeutig bestimmte Lagrange Funktion

Für eine beliebige Funktion der generalisierten Koordinaten und der Zeit $R(q_a, t)$ führen die Funktionen

$$\mathcal{L} = T - U, \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}R(q_a, t)$$

zu den gleichen Bewegungsgleichungen, die Lagrange-Funktion eines Systems ist also bis auf die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion der Koordinaten und der Zeit bestimmt, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_a} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\sum_b \frac{\partial R}{\partial q_b} \dot{q}_b + \frac{\partial R}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_a} \frac{dR}{dt} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_a} - \frac{\partial}{\partial q_a} \frac{dR}{dt} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) + \frac{\partial}{\partial q_a} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_a} \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \end{aligned}$$

8 Kreiseltheorie

Für einen starren Körper wird der **Trägheitstensor** definiert als

$$\Theta_{ik} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} [g_{ik}(x_{\nu})_j(x_{\nu})^j - (x_{\nu})_i(x_{\nu})_k]$$

Speziell für Kartesische Koordinaten

$$\Theta_{ik} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} [(x_{\nu})_j(x_{\nu})^j \delta_{ik} - (x_{\nu})_i(x_{\nu})_k]$$

Die Diagonalelemente sind die **Trägheitsmomente** bzgl. der jeweiligen Achsen, wobei die restlichen Glieder die so genannten **Deviationsmomente** sind. Die Rotationsenergie ist gegeben durch

$$T_r = \frac{\Theta_{ik} \omega^j \omega^k}{2}$$

Für den Drehimpuls gilt

$$L_i = \Theta_{ik} \omega^k \quad \text{bzw.} \quad \vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Da Θ symmetrisch ist ist sie diagonalisierbar und es gibt 3 Achsen für die Θ in eine Diagonalfom übergeht. Diese drei Achsen sind die **Hauptträgheitsachsen** und gleichzeitig auch die **freien** Achsen des Körpers. Bei einer Rotation um eine dieser Achsen A_i gilt

$$T_r = \frac{\Theta_{ii} \omega^2}{2} \quad \wedge \quad \vec{L} = \Theta_{ii} \cdot \vec{\omega}$$

Für einen Beobachter im körperfesten Koordinatensystem gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

woraus die **Eulerschen Gleichungen** folgen

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_3 \omega_1 = M_2$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = M_3$$

wobei $\vec{\omega}$ und Θ bzgl. des Körperfesten Koordinatensystems (im allgemeinen kein Inertialsystem) definiert sind.

9 Hamiltonsche Mechanik

9.1 Hamiltonsches Prinzip

Definieren die Wirkung S des Systems zwischen zwei Zeitpunkten als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}$$

Hamiltonsches Prinzip: Die von einem Massenpunktsystem (im Konfigurationsraum) tatsächlich durchlaufene Bahnkurve zeichnet sich gegenüber den zugelassenen Vergleichsbahnen dadurch aus, daß für sie die Wirkung stationär wird, bzw. einen Extremwert (meist ein Minimum) annimmt:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = 0$$

Oberes nennt man auch **Prinzip der kleinsten Wirkung**. Dabei erfüllen die Bahnvariationen δq_a folgende Bedingungen

- Die Variationen sind bei konstanter Zeit zu betrachten, d.h. $\delta t = 0$.
- Die Variationen sind infinitesimal klein.
- Die Vergleichsbahnen sind zwischen den gleichen Zeitpunkten t_1, t_2 zu betrachten.
- An den beiden Enden t_1, t_2 sind die Zustände identisch, d.h. $\delta q_a |_{t_1, t_2} = 0$.

Es ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = \sum_{a=1}^f \delta q_a \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$$

Die Lagrange Gleichungen sind also die Lösungen der *Euler-Lagrangeschen* Variationsaufgabe.

9.2 Hamilton Funktion

Definieren die Hamilton Funktion

$$\mathcal{H} := \sum_{a=1}^f p_a \dot{q}_a - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_a, \dot{q}_a(q_b, p_b, t), t) = \mathcal{H}(q_a, p_a, t)$$

als Funktion der generalisierten Koordinaten, Impulse und der Zeit.

9.3 Kanonischen (Hamiltonsche) Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_a} &= \frac{\partial}{\partial q_a} \sum_{b=1}^f \dot{q}_b p_b - \frac{\partial}{\partial q_a} \mathcal{L} = \sum_{b=1}^f \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} p_b - \sum_{b=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} \underbrace{\frac{\partial q_b}{\partial q_a}}_{\delta_{ab}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} \right) \\ &= \sum_{b=1}^f \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} p_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \sum_{b=1}^f \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} p_b = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = -\dot{p}_a \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} &= \frac{\partial}{\partial p_a} \sum_{b=1}^f p_b \dot{q}_b - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_a} = \dot{q}_a + \sum_{b=1}^f p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} - \sum_{b=1}^f \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} = \dot{q}_a \end{aligned}$$

9.4 Weitere Eigenschaften

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{a=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} \dot{p}_a}_0 \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{a=1}^f \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial t} p_a - \sum_{a=1}^f \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}}_{p_a} \frac{\partial \dot{q}_a}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Hängt die kinetische Energie nur von den Quadraten \dot{q}_a^2 der generalisierten Geschwindigkeiten ab, ist also homogen vom Grad 2, und ist $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_a} = 0$, so ist die Hamilton Funktion genau die Energie des Systems

$$\mathcal{H} = \sum_{a=1}^f \dot{q}_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \mathcal{L} = \sum_{a=1}^f \dot{q}_a \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \mathcal{L} = 2T - T + U = T + U = E$$

und

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

wird zur Energiebilanz.

Bemerkung: Allgemein folgt aus skleronomen Bindungen dass die Hamilton Funktion gleich der Energie ist³: $H = E$. Ist also die Hamilton Funktion nicht explizit zeitabhängig, so impliziert dies skleronome Bindungen und somit auch Energieerhaltung!

9.5 Poisson-Klammern

9.5.1 Definition

Definieren die **Poisson-Klammer** $\{, \}$ bzgl. zweier physikalischer Größen $A(q_a, p_a, t)$, $B(q_a, p_a, t)$ als

$$\{A, B\} := \sum_{a=1}^f \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_a} \frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial B}{\partial q_a} \right\}$$

9.5.2 Eigenschaften

- Antisymmetrie

$$\{A, B\} = -\{B, A\}$$

- Linearität

$$\{(A + B), C\} = \{A, C\} + \{B, C\}$$

-

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$$

-

$$\{A, p_a\} = \frac{\partial A}{\partial q_a} \qquad \{A, q_a\} = -\frac{\partial A}{\partial p_a}$$

- Jakobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

³Aus skleronomen Bindungen folgt dass die kinetische Energie eine homogene Funktion vom Grad 2 ist

$$\{q_a, p_b\} = \delta_{ab} \qquad \{q_a, q_b\} = \{p_a, p_b\} = 0$$

- Für eine Physikalische Größe $\{A, B\}$ gilt das **Poisson-Theorem**:

$$\frac{d}{dt}\{A, B\} = \left\{ \frac{dA}{dt}, B \right\} + \left\{ A, \frac{dB}{dt} \right\}$$

Sind also A und B Erhaltungsgrößen so ist auch deren Poisson-Klammer eine Erhaltungsgröße!

Aus

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial A}{\partial p_a} \dot{p}_a \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_a} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_a} \right)}_{\{A, \mathcal{H}\}} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

folgt

$$\frac{dA}{dt} = \{A, \mathcal{H}\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

und ferner

$$\dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}\} \qquad \dot{q}_a = \{q_a, \mathcal{H}\}$$

Hängt A nicht explizit von der Zeit ab, so ist A eine Erhaltungsgröße genau dann wenn

$$\{A, \mathcal{H}\} = 0$$

9.6 Kanonische Transformationen

Suchen Transformation $q'_a = q'_a(q_b, p_b, t)$, $p'_a = p'_a(q_b, p_b, t)$ und eine neue Hamilton Funktion \mathcal{H}' so dass

$$\dot{p}'_a = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'_a} \wedge \dot{q}'_a = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_a}$$

Die Lagrange Funktionen

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^f \dot{q}_a p_a - \mathcal{H} \qquad \mathcal{L}' = \sum_{a=1}^f \dot{q}'_a p'_a - \mathcal{H}'$$

dürfen sich nur um die totale Zeitableitung einer Funktion $R(q_a, q'_a, t)$ unterscheiden. Diese wird die **Erzeugende der Transformation** genannt. Es muss also gelten

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^f \dot{q}_a p_a - \mathcal{H} = \mathcal{L}' + \frac{dR}{dt} = \sum_{a=1}^f \dot{q}'_a p'_a - \mathcal{H}' + \frac{dR}{dt} \rightarrow \sum_{a=1}^f (\dot{q}_a p_a - \dot{q}'_a p'_a) + \mathcal{H}' - \mathcal{H} = \sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial R}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial R}{\partial q'_a} \dot{q}'_a \right) + \frac{\partial R}{\partial t}$$

Vergleich der beiden Seiten führt zu

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial R}{\partial t}$$

$$p_a = \frac{\partial R}{\partial q_a}$$

$$p'_a = -\frac{\partial R}{\partial q'_a}$$

Umstellen ergibt dann die gewünschten Beziehungen zwischen den alten und neuen *Koordinaten*. Man erhält also die neue Hamilton Funktion

$$\mathcal{H}'(q'_a, p'_a, t) = \mathcal{H}(q_b(q'_a, p'_a, t), p_b(q'_a, p'_a, t)) + \frac{\partial R}{\partial t}(q_b(q'_a, p'_a, t), q'_a, t)$$

Analog handelt man auch im Falle von Erzeugenden die von anderen Variablen abhängen.

9.6.1 Hinreichendes Kriterium für kanonische Transformationen

Kanonische Transformationen sind gerade solche Transformationen die die Poisson-Klammern zweier (beliebiger) Größen A und B invariant lassen:

$$\{A, B\}_{p,q} = \{A, B\}_{p',q'}$$

Das Problem reduziert sich also auf die Berechnung der Poisson-Klammern der transformierten Koordinaten und Impulse q', p' als Funktionen der ursprünglichen Koordinaten und Impulse q, p . Es muss also gelten:

$$\{q'_i, q'_j\}_{q,p} = 0$$

$$\{p'_i, p'_j\}_{q,p} = 0$$

$$\{q'_i, p'_j\}_{q,p} = \delta_{ij}$$

9.7 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Suchen Transformation so dass

$$\mathcal{H}' = 0$$

d.h alle transformierten kanonischen Variablen q'_a, p'_a sind zyklische Variablen, also

$$q'_a = A_a = const, p'_a = B_a = const$$

Bei bekannter Transformation ist das Problem gelöst, da

$$q_a = q_a(q'_b, p'_b, t) = q_a(A_b, B_b, t) = q_a(t)$$

$$p_a = p_a(q'_b, p'_b, t) = p_a(A_b, B_b, t) = p_a(t)$$

Zeitfunktionen darstellen. Die gesuchte erzeugende $R = R(q_a, p'_a, t) = R(q_a, B_a, t)$ erfüllt die partielle DGL

$$\mathcal{H} \left(q_a, \underbrace{\frac{\partial R}{\partial q_a}}_{p_a}, t \right) + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow R = R(q_a, b_a, t) + A, b_a, A : const$$

Obere wird **Hamilton-Jacobi Gleichung** genannt. Aus ihr können dann die gesuchten q'_a, p'_a und somit auch die q_a, p_a berechnet werden. Dabei stellt sich heraus dass

$$R = \int dt \mathcal{L} = S$$

bis auf eine unwesentliche Konstante, genau die Wirkung des Systems ist! Die Hamilton-Jacobi Gleichung ist also die Gleichung, der die Wirkung S genügen muss:

$$\mathcal{H} \left(q_a, \frac{\partial S}{\partial q_a}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

10 Herleitungen zwischen den Formalismen

Betrachten N Massenpunkte unter r [anholonomen] Nebenbedingungen, also mit $f = 3N - r$ Freiheitsgraden.

10.1 D'Alembert \rightarrow Lagrange I

Wir beginnen mit

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0$$

und für virtuelle Verrückungen δx_i und $\delta t = 0$

$$\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i + f_{k0} \delta t = \sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^r \lambda_k \sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} = 0$$

Wir subtrahieren die 2e von der 1en Gleichung und erhalten

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \right) \delta x_i = 0$$

Wählen wir jetzt also $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ so dass die r *abhängigen* Summanden verschwinden, so müssen auch die restlichen verschwinden da deren Verrückungen unabhängig sind:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \cong F_i + \sum_{i=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

10.2 Lagrange I \rightarrow D'Alembert

Wir beginnen mit

$$m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} = 0$$

und summieren auf

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \right) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i - \sum_{i=1}^{3N} \sum_{k=1}^r \lambda_k f_{ki} \delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} f_{ki} \delta x_i}_0 = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i \quad \square \end{aligned}$$

10.3 D'Alembert \rightarrow Lagrange II

Wir drücken die virtuellen Verrückungen δx_i durch die generalisierten Koordinaten aus

$$\delta x_i = \sum_{a=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \delta q_a$$

und gehen damit in das D'Alembert Prinzip ein

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \sum_{a=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \delta q_a = \sum_{a=1}^f \delta q_a \left\{ \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} - \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a}}_{\Phi_a} \right\}$$

Da die δq_a unabhängig sind muss jeder Summand verschwinden, also

$$\begin{aligned}\Phi_a &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_a} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_a} \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a}\end{aligned}$$

Sind alle Kräfte Potentialkräfte $F_i = -\partial_i U(x_i, t)$ so folgt

$$\begin{aligned}\Phi_a &= - \sum_{a=1}^f \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_a} = - \frac{\partial U}{\partial q_a}, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_a} = 0 \\ &\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} (T - U) - \frac{\partial T}{\partial q_a} (T - U) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \quad \square\end{aligned}$$

10.4 Lagrange II \rightarrow D'Alembert

Wir beginnen mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \sum_{a=1}^f F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a}$$

, machen den umgekehrten Rechenweg wie vorhin und erhalten

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} - \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} = 0$$

Wir summieren auf und erhalten

$$0 = \sum_{a=1}^f \delta q_a \sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} - F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \right) = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \sum_{a=1}^f \frac{\partial x_i}{\partial q_a} \delta q_a = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i \quad \square$$

10.5 Lagrange II \rightarrow Hamilton

Wir beginnen mit

$$\sum_{a=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \right) \delta q_a = 0 \rightarrow \sum_{a=1}^f \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a \stackrel{(*)}{=} \sum_{a=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a$$

und schreiben um

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \delta q_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right)}_{\delta \mathcal{L}} = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a = \left[\sum_{a=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

da für $t = t_1, t_2$ gilt $\delta q_a = 0$. \square

10.6 Hamilton \rightarrow Lagrange II

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \frac{d}{dt} \delta q_a \right) \\ &= \sum_{a=1}^f \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right]_{t_1}^{t_2}}_0 \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{a=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta q_a = 0 \end{aligned}$$

Da δq_a unabhängig sind muss jeder einzelner Summand verschwinden. Da ferner t_1, t_2 beliebig sein können muss auch der Integrand verschwinden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} = 0 \quad \square$$

10.7 Hamilton \rightarrow D'Alembert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right) \delta x_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \delta x_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad \square \end{aligned}$$