Gekoppelte Schwinger & Normalschwingungsanalyse
Eine Einführung

Stilianos Louca

21. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1.1 Kurze Beschreibung des Problems

Dieser Artikel behandelt das allgemeine Problem der gekoppelten, ungedämpften *frei von äußeren Erregungen* Schwinger. Unter gekoppelt wollen wir Schwinger nennen, deren Bewegung von einem oder mehreren anderen Schwingern des Systems beeinflusst wird. Grunderfahrungen mit linearen Differenzialgleichungen 2er Ordnung und Grundlagen der linearen Algebra werden vorrausgesetzt. Der Artikel wendet sich hauptsächlich an Studenten der Physik die gerade eine Einführung in die Theoretische Mechanik hören.
Dabei habe ich besonderen Wert darauf gelegt das Problem aus verschiedenen Sichtpunkten zu behandeln, da dies in der Vorlesung oft nur monoton behandelt wird, wobei jedoch im Endeffekt jeder so seine persönliche Betrachtungsweise hat und die eine oder andere Herangehensweise mehr oder weniger mag.

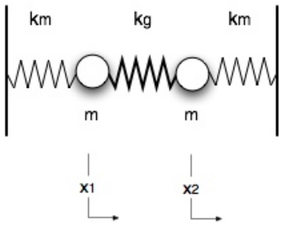
1.2 Fehler gefunden

Hast Du einen Fehler gefunden oder einen Verbesserungsvorschlag so schicke mir eine eMail: *Freakintosh.apfel@DigitalCalamity.org* ohne das *Obst*

2 Einführung: Die gekoppelten Federschwinger

2.1 Problemstellung

Wir betrachten zwei Massen m die miteinander mit einer Feder der Federkonstante k_g verbunden sind und jeweils auch durch eine Feder der Federkonstante k_m mit einer Mauer verbunden sind. Die beiden Massen können sich nur horizontal bewegen, und es wirken keine äußeren Kräfte auf das System. Gesucht sind die Bewegungsgleichungen und deren Lösungen.



2.2 Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Wir nennen x_1 und x_2 die jeweiligen Auslenkungen der Massen von ihrer Gleichgewichtslage. Wir wollen nun untersuchen welche Kräfte F_1 und F_2 auf die beiden Massen bei beliebigen Auslenkungen wirken. Die Feder übt auf die erste Masse eine Kraft $F_{1m} = -k_m x_1$ aus (Hookes'sches Gesetz). Die *relative* Verschiebung der Massen zueinander beträt $x_2 - x_1$ und ist genau die Dehnung bzw. Kontraktion der mittleren Feder, die eben auf die erste Masse wiederum eine Kraft $F_{1g} = k_g(x_2 - x_1)$ ausübt[1]. Damit können wir nach dem Newtonschen Axiom schreiben

$$m\ddot{x}_1 = F_{1m} + F_{1g} = -k_m x_1 + k_g(x_2 - x_1)$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich analog für die zweite Masse

$$m\ddot{x}_2 = F_{2m} + F_{2g} = -k_m x_2 + k_g(x_1 - x_2)$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen des Systems, und stellen wie zu erkennen ist ein *Lineares Differentialgleichungssystem 2er Ordnung dar.*

2.3 Lösen der Bewegungsgleichungen : Ansatzmethode

Randbemerkung: Im folgenden durchlaufen die Indizes i, j die Werte $1, 2$. Tauchen beide in der gleichen Gleichung auf so sind diese verschieden von einander gemeint.

2.3.1 Der Exponentialansatz

Wir wollen jetzt die entsprechenden *Bahngleichungen* der Massen berechnen, das Differentialgleichungssystem also lösen. Wir machen den Ansatz

$$x_1 = A_1 \cdot e^{\lambda t},\ x_2 = A_2 \cdot e^{\lambda t}$$

und gehen damit in die DGL

$$m\ddot{x}_i = -k_m x_i + k_g(x_j - x_i)$$

ein.

$$\ddot{x}_i = A_i \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} = \lambda^2 \cdot x_i$$

$$\Rightarrow\ m\ddot{x}_i = mA_i\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} = -k_m A_i \cdot e^{\lambda t} + k_g\left(A_j e^{\lambda t} - A_i e^{\lambda t}\right)$$

$$\Rightarrow\ A_i m\lambda^2 + A_i(k_m + k_g) - A_j k_g = 0$$

Auch wenn man es nicht gleich sieht, stellt oberer Ausdruck ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten A_1 und A_2 dar:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m\lambda^2 + k_m + k_g & -k_g \\ -k_g & m\lambda^2 + k_m + k_g \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1]Bemerke dass eine Verlängerung der mittleren Feder bedeutet dass die erste Masse von ihr nach rechts gezogen wird

Es besitzt genau dann **nicht triviale Lösungen**[2] wenn die Determinante der *Koeffizientenmatrix A* verschwindet, der *Kern* also nicht nur die 0 enthält. Dies hängt aber anscheinend von λ ab.
Bemerke: Man sieht dass aus der Symmetrie des Problems (die beiden Massen sind so zusagen gleichberechtigt) auch eine symmetrische Matrix hervorgekommen ist! Dies muss nicht unbedingt der Fall sein!

2.3.2 Bestimmung des Parameters λ

Wir haben gesehen dass $\det(A) = 0$ sein muss. Wir werden später sehen dass dies im Grunde genommen ein so genanntes *Eigenwertproblem* ist. Also:

$$\det(A) = (m\lambda^2 + k_m + k_g)^2 - k_g^2 = m^2\lambda^4 + 2m(k_m + k_g)\lambda^2 + (k_m^2 + 2k_g k_m) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}^2 = \frac{-m(k_m + k_g) \pm \sqrt{4m^2(k_m + k_g)^2 - 4(k_m^2 + 2k_m k_g)}}{2m^2} = \frac{-(k_m + k_g) \pm k_g}{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \pm i\sqrt{\frac{k_m}{m}},\ \lambda_2 = \pm i\sqrt{\frac{k_m + 2k_g}{m}}$$

Wir nennen

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k_m}{m}},\ \omega_2 := \sqrt{\frac{k_m + 2k_g}{m}} \ \rightarrow\ \lambda_1 = \pm i\omega_1,\ \lambda_2 = \pm i\omega_2$$

und werden gleich sehen dass diese *Kreisfrequenzen* darstellen. Wi haben also 4 verschiedene λ gefunden.

2.3.3 Bestimmung des allgemeinen Lösungen

Einsetzen von $\lambda_1^2 = -\omega_1^2$ in die Gleichung ergibt

$$\begin{pmatrix} k_g & -k_g \\ -k_g & k_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow\ A_1 = A_2$$

und analog für $\lambda_2^2 = -\omega_2^2$

$$\begin{pmatrix} -k_g & -k_g \\ -k_g & -k_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \ \rightarrow\ A_1 = -A_2$$

Die 4 Lösungen sind also (eine für jedes λ)

$$x_1 = x_2 = A_1 e^{i\omega_1 t},\ x_1 = x_2 = A_1 e^{-i\omega_1 t},\ x_1 = -x_2 = A_1 e^{i\omega_2 t},\ x_1 = -x_2 = A_1 e^{-i\omega_2 t}$$

Nun weis man aus der allgemeinen Theorie der DGL dass sich die allgemeine Lösung des Problems als eine Linearkombination von *linear Unabhängigen*[3] homogenen Lösungen zusammensetzt. Also

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} + C_3 e^{i\omega_2 t} + C_3 e^{-i\omega_2 t}$$

$$x_2 = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} - C_3 e^{i\omega_2 t} - C_3 e^{-i\omega_2 t}$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$$

Wenn man sich kurz an normale harmonische Schwinger erinnert erkennt man dass man oberes nach ein paar Umformungen auch wie folgt schreiben kann

$$\boxed{x_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad x_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\ B_1, B_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}}$$

Wir haben es geschaft! Oberes ist die allgemeine Lösung des Problems!

[2]Die triviale Lösung wäre $A_1 = A_2 = 0$ was einfach ein Stillstehen der Massen im Gleichgewicht bedeuten würde
[3]Die Wronski Determinante W darf nicht verschwinden. Dies ist hier der Fall.

2.4 Methode der Substitution

Wir substituieren $\xi^+ := x_1 + x_2$ und $\xi^- := x_1 - x_2$. Wir werden gleich sehen dass dies seinen Sinn hat. Eingesetzt in die DGL ergibt

$$m\ddot{\xi}^+ = m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -k_m x_1 + k_g(x_2 - x_1) - k_m x_2 + k_g(x_1 - x_2) = -k_m(x_1 + x_2) = -k_m\xi^+$$

$$m\ddot{\xi}^- = m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = -k_m x_1 + k_g(x_2 - x_1) - [-k_m x_2 + k_g(x_1 - x_2)]$$

$$= -k_m(x_1 - x_2) - 2k_g(x_1 - x_2) = -(k_m + 2k_g)\xi^-$$

Wir haben das Problem also auf zwei gewöhnliche, **entkoppelte** DGL'n 2er Ordnung zurückgeführt! Diese können wir sofort getrennt mit dem Exponentialansatz lösen und bekommen

$$\xi^+ = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1),\ \omega_1 = \sqrt{\frac{k_m}{m}},\ A_1, \varphi_1 \in \mathbb{R}$$

$$\xi^- = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2),\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_m + 2k_g}{m}},\ A_2, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$

Nun wollen wir das ganze in unsere alten Koordinaten x_1, x_2 zurückrechnen, und erhalten

$$x_1 = \frac{\xi^+ + \xi^-}{2} = \underbrace{\frac{A_1}{2}}_{B_1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \underbrace{\frac{A_2}{2}}_{B_2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = \frac{\xi^+ - \xi^-}{2} = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Wir haben also ratzbatz die gleiche Bewegungsgleichung wie vorhin gefunden! Leider geht's in vielen Fällen nicht so einfach, und eine Verallgemeinerung der ersten Methode ist oft die einzige zugängliche Weise um das Problem zu behandeln.

2.5 Interpretation der Ergebnisse: Fundamentalschwingungen

Die Parameter B_1, B_2, φ_1 und φ_2 sind im allgemeinen aus den Anfangsbedingungen zu gewinnen. In dem Sinne sind sie gewissermaßen *frei wählbar*.

2.5.1 Gleichsinnige Schwingung

Ist $B_1 \neq 0, B_2 = 0$ so ergibt sich

$$x_1 = x_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

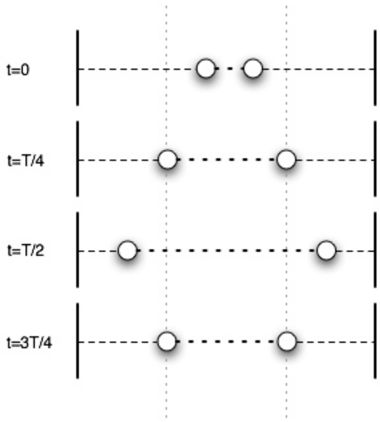
Die beiden Massen schwingen also gleichsinnig in Phase mit der gleichen Amplitude um deren Gleichgewichtslage. Die mittlere Feder wird dementsprechend weder gedehnt noch gestaucht und hat somit keinen Einfluss auf die Schwingung. Die beiden Massen schwingen somit lediglich als wenn die mittlere Feder nicht existiere. Man nennt solch eine Schwingung eine *Normalschwingung* oder *Fundamentalschwingung*.

2.5.2 Gegensinnige Schwingung

Ist $B_1 = 0, B_2 \neq 0$ so ergibt sich

$$x_1 = -x_2 = B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Die beiden Massen schwingen also mit der gleichen Amplitude B_2 und Frequenz und einer Phasendifferenz $\Delta\varphi = \pi$ um deren Gleichgewichtslage. Folgende Graphik illstriert diesen Ablauf für $\varphi_2 = 0$.



Dieser Spezialfall stellt ebenfalls eine Fundamentalschwingung dar.

2.5.3 Schwebung

Sind $B_1 = B_2 =: B$ so ergibt sich

$$x_1 = B\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 2B \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right)$$

$$x_1 = B\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 2B \cdot \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)}{2}\right)$$

Ist $k_g << k_m$ also $\omega_1 \approx \omega_2$ so kann man sagen dass die beiden Massen eine *quasiharmonische* Schwingung der Kreisfrequenz

$$\omega_G := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

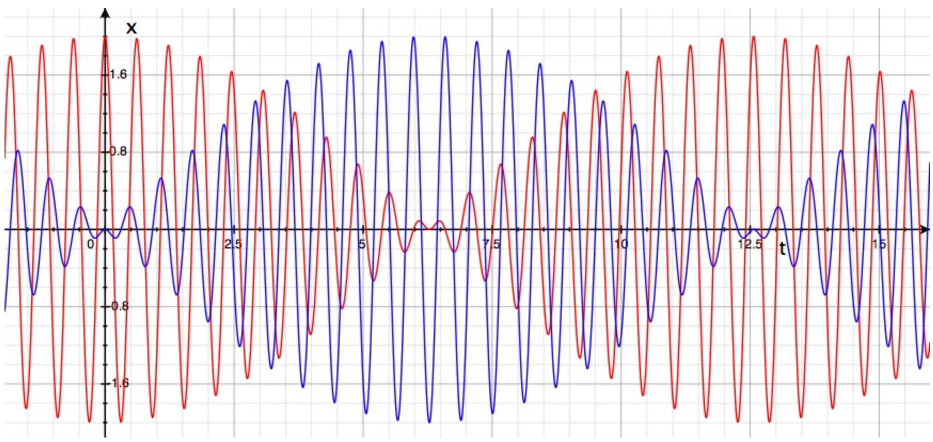
durchführen, deren Amplitude auch *harmonisch* mit der Frequenz

$$\omega_S := \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

schwingt. Sie kann in den Formeln auch negative Werte annehmen! Diese Bewegung nennt man eine *Schwebung*, die Zeit zwischen **drei** Stillständen einer Masse

$$T_S := \frac{2\pi}{\omega_S}$$

Schwebungsperiode. Trägt man den Bewegungsablauf über die Zeit auf, so sieht mann dass die erste Masse genau dann im Stillstand ist wenn die zweite ihre maximale Amplitude erreicht hat und umgekehrt. Die beiden Schwinger tauschen also untereinander Energien aus! Folgende Graphik illstriert diesen Ablauf für die beiden Schwinger $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,\ \omega_1 = 10.5\ rad,\ \omega_2 = 10\ rad,\ B = 1\ Einh.$.



3 Verallgemeinerung des Problems: n gekoppelte Schwinger

Wir betrachten nun n gekoppelte *harmonische*, ungedämpfte Schwinger. Analog wie im oberen Beispiel sind die allgemeinen Bewegungsabläufe keine harmonische Schwingungen mehr, sondern *Linearkombinationen* von harmonischen Schwingungen. In speziellen Fällen[4] schwingen jedoch die einzelnen Schwinger harmonisch, und zwar mit der gleichen Frequenz ω. Diese Schwingungen nennt man die *Fundamentalschwingungen* des Systems, und die entsprechenden Frequenzen *Eigenfrequenzen*. Im allgemeinen Läuft das Problem darauf hinaus diese Eigenfrequenzen bzw. Eigenschwingungen zu finden. Seien $x_1, ..., x_n$ die Koordinaten der jeweiligen Schwinger[5], so dass man allgemein Schreiben kann

$$\ddot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j, \ i = 1, ..., n \tag{1}$$

Kein Grund zum erschrecken, obere Gleichungen stellen lediglich die aufgestellten Bewegungsgleichungen dar. Kehren wir kurz zurück zu unserem Beispiel in Abschnitt 2 so würden wir schreiben

$$\ddot{x}_1 = -\underbrace{\frac{(k_m + k_g)}{m}}_{a_{11}} \cdot x_1 + \underbrace{\frac{k_g}{m}}_{-a_{12}} \cdot x_2 = -\sum_{j=1}^{2} a_{1j} \cdot x_j$$

$$\ddot{x}_2 = \underbrace{\frac{k_g}{m}}_{-a_{21}} \cdot x_1 - \underbrace{\frac{(k_m + k_g)}{m}}_{a_{22}} \cdot x_2 = -\sum_{j=1}^{2} a_{2j} \cdot x_j$$

3.1 Die Matrizen-Methode

3.1.1 Aufstellung der Matrizen - Entkopplung der Bewegungsgleichungen

Matrizenrechnung ist zwar in konkreten Problemstellungen oft irritierend, jedoch lässt sich mit ihnen so manche Theorie elegant behandeln. Und diese Methode ist wie der Name schon besagt, nicht viel mehr als Matrizen-Spielerei, führt aber zu erstaunlichen Ergebnissen!
Wir definieren die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ weshalb wir schreiben können

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ .. \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ .. \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix} = -A \cdot \vec{x}, \ \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dies ist genau der gleiche Ausdruck wie Gleichung 1. Für **jede beliebige** invertierbare $n \times n$ Matrix C können wir schreiben

$$C^{-1} \cdot \ddot{\vec{x}} = -C^{-1}A \cdot \vec{x} = -C^{-1}A \cdot E \cdot \vec{x} = -C^{-1}A \cdot CC^{-1} \cdot \vec{x} = -\underbrace{\left(C^{-1}AC\right)}_{\Omega} \cdot \underbrace{C^{-1}\vec{x}}_{\vec{q}} \quad \rightarrow \quad \ddot{q} = C^{-1} \cdot \ddot{x} = -\Omega \cdot \vec{q}$$

Und was hat man davon? Nun, noch nichts... Ist jetzt aber $\Omega \in M(n \times n)$ eine *Diagonalmatrix*, d.h $\Omega_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, so folgt

$$\ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ .. \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ .. \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 q_1 \\ -\lambda_2 q_2 \\ .. \\ -\lambda_n q_n \end{pmatrix}$$

[4] Je nach Anfangsbedingungen
[5] Diese müssen nicht unbedingt Raumkoordinaten sein, und die Schwinger müssen nicht einmal Massenpunkte sein!

Aber das ist genau das was wir uns immer gewünscht haben. n entkoppelte DGL'n 2er Ordnung (eine für jedes q_i), die wir problemlos mit dem Exponentialansatz lösen können! Nur wie findet man solch eine Matrix C ? Mit dieser Frage haben sich zum Glück schon viele Mathematiker beschäftigt. Aus der linearen Algebra nennt man solch ein Verfahren ein *Diagonalisierungsverfahren.*

Kurze Erinnerung aus der linearen Algebra: Die Matrix C die die Eigenschaft hat dass $C^{-1}AC = \Omega$ eine Diagonalmatrix ist[6] ist hat als Spalten genau die Eigenvektoren von A. Man findet also die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$[7] der Matrix A aus der so genannten *Sekulargleichung*

$$\det(\lambda E - A) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

und die dazu gehörigen Eigenvektoren bzw. für jeden Eigenraum eine Basis aus Eigenvektoren. Diese sind orthogonal zu einander! Aus den Eigenvektoren $u_1, ..., u_n$ bildet man also die Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} | & | & ... & | \\ \\ u_1 & u_2 & ... & u_n \\ \\ | & | & ... & | \end{pmatrix}$$

Die diagonal-Einträge der Matrix $\Omega = C^{-1}AC$ sind genau die Eigenwerte von A.
Sind $a_{ij} = a_{ji}$ so ist A eine *Symmetrische* Matrix. Der *Spektralsatz* besagt dass alle Eigenwerte einer symmetrische Matrix A reell sind und es genau solch eine Matrix C bzw. Ω gibt.

3.1.2 Lösen der entkoppelten Gleichungen

Wir haben nun die Matrizen C und Ω gefunden. Dann können wir die DGL für $\vec{q}$ lösen und erhalten somit $\vec{q} = \vec{q}(t)$. Da $C^{-1}\vec{x} = \vec{q}$ gilt $\vec{x} = CC^{-1}\vec{x} = C\vec{q}$. Wir erhalten also

$$\vec{x} = C \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} | \\ u_1 \\ | \end{pmatrix} \cdot q_1 + ... + \begin{pmatrix} | \\ u_n \\ | \end{pmatrix} \cdot q_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{u}_i \cdot q_i$$

Die Bahngleichungen ergeben sich also als *Superposition* der verschiedenen $\vec{u}_i \cdot q_i$.
Bemerkung: Die Integrationskonstanten stecken alle in den q_i. Jedoch können auch die *Längen* der Vektoren $\vec{u}_i$ variiert werden, sie bleiben trotzdem Eigenvektoren, die Matrix C sieht dann einfach anders aus. Ω bleibt jedoch immer gleich!

3.1.3 Orthonormale Eigenvektoren

Normiert man die Eigenvektoren $\vec{u}_i$ so ist die Matrix C eine so genannte *Orthogonale* Matrix, die unter anderem die Eigenschaft hat dass $C^{-1} = C^T$. Man kann also schreiben

$$\vec{q} = C^{-1}\vec{x} = C^T\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{x} \\ .. \\ \vec{u}_n \cdot \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ .. \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

Die durch die Eigenvektoren $\vec{u}_i$ beschriebenen Linearkombinationen $\vec{u}_i \cdot \vec{x}$ der Koordinaten x_j *bewegen* sich also jeweils gemäß $q_i(t)$. Man hat also im Endeffekt durch C eine *Koordinatentransformation* durchgeführt und das System in n Linearkombinationen von $x_1, ..., x_n$ ausgedrückt die jeweils immer eine Normalschwingung durchführen bzw. durch eine entkoppelte DGL dargestellt werden.

3.1.4 Zu erwartende Lösungen

In den meisten Fällen werden q_i harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ darstellen:

$$q_i = G_i \cdot (\omega_i t + \varphi_i), \ G_i, \varphi_i : const$$

Setzt man alle anderen $q_j \equiv 0$[8] so ergibt sich

$$\vec{x} = G_i \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i) \cdot \vec{u}_i$$

[6] Insofern es so eine gibt
[7] Beachte dass nicht unbedingt alle Eigenwerte von einander verschieden sind
[8] Jede allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x} = \lambda x$ ergibt durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten die triviale Lösung $x \equiv 0$

Die Werte $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ sind dementsprechend definitionsgemäß genau die Eigenfrequenzen. Die Schwingungen nennt man *Normalschwingungen* und dementsprechend den ganzen Prozess *Normalschwingungsanalyse*. Mann sollte aber auch bei einem $\lambda_i = 0$ nicht abschrecken, daraus ergibt sich nämlich einfach dass $q_i = G_1 t + G_2,\ G_1, G_2 : const$. Setzt man dann alle anderen $q_j \equiv 0$, so ergibt sich

$$\vec{x} = (G_1 t + G_2) \cdot \vec{u}_i$$

3.1.5 Zusammenfassung

Kurz gesagt, folgt die allgemeine Vorgehensweise an die Sache.

- Aufstellen der Bewegungsgleichung für die geeignet gewählten Koordinaten des Systems
- Umschreiben der Bewegungsgleichungen in eine Matrix-Gleichung → Konstruktion der Koeffizientenmatrix A:
$$\ddot{\vec{x}} = -A \cdot \vec{x}$$
- Aufstellen der Sekulargleichung → auffinden der Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A. Sind diese positiv so sind deren positive Wurzeln die Eigenfrequenzen des Systems.
- Lösen der n DGL'n 2er Ordnung:
$$\ddot{q}_i = -\lambda_i \cdot q \ \rightsquigarrow \ q_i = q_i(t)$$
- Auffinden der zugehörigen (orthogonalen) Eigenvektoren $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.
- Aufschreiben der allgemeinen Lösung als
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \vec{u}_i$$

3.2 Die Ansatz und Ausrechnen Methode

Analog wie im Abschnitt 2.3 machen wir den Ansatz

$$x_i = A_1 e^{\lambda t}$$

und gehen damit in die DGL'n ein:

$$\ddot{x}_i = \lambda^2 \cdot A_1 e^{i\omega t} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_j e^{i\omega t} \ \rightarrow \ -\omega^2 A_1 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_j$$

$$\rightarrow \ a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + ... + a_{i,i-1}A_{i-1} + (a_{ii} - \omega^2)A_i + a_{i,i+1}A_{i+1} + ... + a_{in}A_n = 0$$

Oberes lineares Gleichungssystem (n Gleichungen) besitzt genau dann nicht triviale Lösungen wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet, also

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} - \omega^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Man sieht, man kommt um die Sekulargleichung nicht drum rum! Die Wurzeln des durch die Determinantenbildung entstehenden Polynoms n-ten Grades sind genau die Eigenwerte der Matrix und ferner die Quadrate der Eigenfrequenzen des Systems[9]. Wir finden also die Werte $\omega_1^2, ..., \omega_n^2$ für die es nicht triviale Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems gibt. Setzt man die jeweils ein, so findet man jedes mal eine allgemeine Lösung[en] $\vec{A} = (A_1, ..., A_n)$ bzw. einen Eigenvektor der Koeffizientenmatrix. Bemerke dass man eben linear unabhängige Lösungen $\vec{A}$ finden muss. Dies ist äquivalent zur Regel orthogonale Eigenvektoren zu finden.

[9] Wir gehen jetzt mal davon aus das diese immer reell und nicht negativ sind

Beachte: Zu jedem ω_j^2 gibt es zwei ω_j, nämlich die negative und positive Wurzel.
Man hat jetzt also $2n$ Lösungen der Form

$$x_i = A_{ij} e^{\pm i\omega_j t}$$

wobei ω_j eben alle $4n$ möglichen Werte[10] annimmt. Die allgemeine Lösung des DGL-Systems ergibt sich als Linearkombination der einzelnen Lösungen

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} e^{\pm i\omega_j t} \cong \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \cos(\omega_j t + \varphi_j), \;\; B_{ij}, \varphi_j \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Sind manche $\omega_j = 0$ so ergibt der Exponentialansatz eben durch Variation der Konstanten bzw. die *einsetzen und hoffen Methode* für dieses spezielle ω_j :

$$x_i = A_i t + B_i, \;\; A_i, B_i \in \mathbb{R}$$

3.3 Vergleich der beiden Methoden

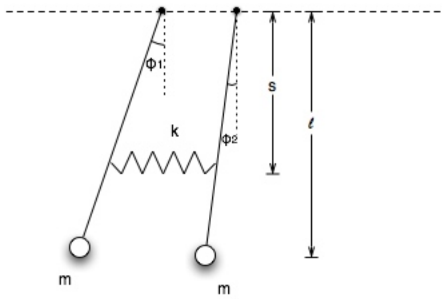
Man hat schon gemerkt dass sich in beiden Methoden viele Vorgänge wiederholen bzw. einfach in einer anderen Weise auftreten. Eigentlich sind die beiden Methoden von der eigentlichen *Komplexität* äquivalent. In beiden Fällen wird die Sekulargleichung aufgestellt und die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix gesucht. Ferner wird im Grunde genommen in beiden Verfahren eine Eigenvektorsuche durchgeführt um im einen Fall die Lösungen korrekt zu *kombinieren* und im anderen Fall die Gleichungen zu lösen. Im Endeffekt sind die beiden Verfahren gleichbedeutend, es unterscheiden sich lediglich die Schreibweise und Durchführungs-Strukturierung.

[10] Es können natürlich auch Doppelwerte auftauchen

4 Beispiel: Das gekoppelte Pendel

4.1 Problemstellung

Wir wollen die Matrizen Methode an einem einfachen Beispiel mit $n = 2$ mathematischen Pendeln illustrieren. Die Pendel, die die gleiche Masse m und Länge l haben sollen, sind mit einer Feder der Federkonstante k im abstand s vom Aufhängepunkt verbunden.



Auf sie wirke nur die Schwerkraft $m\vec{g}$ und die aufgrund der Feder-Dehnung bzw. Stauchung entstehende Kraft. Die Feder sei im Gleichgewicht entspannt. Zu finden seien die Bewegungsgleichungen $\varphi_i = \varphi(t)$ für die beiden Pendel bei kleinen Auslenkungen $\varphi_i \approx 0$.

4.2 Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Die Schwerkraft mg bewirkt auf die Masse m_i einen Drehmoment $M_{i_g} = -mgl \sin \varphi_i \approx -mgl\varphi_i$. Die Feder bewirkt wiederum einen Drehmoment $M_{i_f} = ks^2(\varphi_j - \varphi_i)$. Wir können also schreiben

$$m\ddot{\varphi}_i l^2 = -mgl\varphi_i + ks^2(\varphi_j - \varphi_i) \ \rightarrow \ \ddot{\varphi}_i = -\left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2}\right) \cdot \varphi_i + \frac{ks^2}{ml^2} \cdot \varphi_j$$

Wir schreiben das ganze in eine Matrix um

$$\ddot{\vec{\varphi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2} & -\frac{ks^2}{ml^2} \\ -\frac{ks^2}{ml^2} & \frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -A \cdot \vec{\varphi}$$

4.3 Lösen der Sekulargleichung

Jetzt suchen wir die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A durch die Sekulargleichung:

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^2 - 2\lambda \left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2}\right) + \left(\frac{2gks^2}{ml^3} + \frac{g^2}{l^2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \frac{2\left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2}\right) \pm \sqrt{4\left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2}\right)^2 - 4\left(\frac{2gks^2}{ml^3} + \frac{g^2}{l^2}\right)}}{2} = \frac{g}{l} + \frac{ks^2}{ml^2} \pm \frac{ks^2}{ml^2}$$

Wir nennen aus ersichtlichen Gründen

$$\omega_1^2 := \frac{g}{l}, \ \ \omega_2^2 := \frac{g}{l} + \frac{2ks^2}{ml^2}$$

und erhalten unsere Matrix Ω :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

weshalb wir die DGL'n bekommen

$$\ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = -\Omega \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 q_1 \\ -\omega_2^2 q_2 \end{pmatrix}$$

4.4 Lösen der entkoppelten DGL'n

Durch den Exponentialansatz lösen wir jetzt diese beiden DGL'n und erhalten

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} G_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \\ G_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}, \quad G_1, G_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$

Die Eigenfrequenzen des Systems sind genau ω_1, ω_2.

4.5 Aufsuchen der Eigenvektoren

Jetzt suchen wir die entsprechenden Eigenvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ um die allgemeine Lösung aufzustellen. Wir fordern also

$$A \cdot \vec{u}_i \stackrel{!}{=} \lambda_i \cdot \vec{u}_i \;\rightarrow\; (A - \lambda_i E) \cdot \vec{u}_i = 0$$

Oberes ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem (unbekannte ist hier $\vec{u}_i$) was man z.b mittels dem Gauss Algorithmus lösen kann. Wir erhalten also für $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

$$\vec{u}_1 = (\alpha, \alpha), \;\; \vec{u}_2 = (\beta, -\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Wir setzen $\alpha = \beta = 1$ und erhalten $\vec{u}_1 = (1, 1), \;\; \vec{u}_2 = (1, -1)$. [11] Die Matrix C sieht also wie folgt aus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$\boxed{\vec{\varphi} = q_1 \vec{u}_1 + q_2 \vec{u}_2 = G_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + G_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

4.6 Weitere Erkenntnisse

Wir wollen mal Spasseshalber die Eigenvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ normieren und erhalten

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \; \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \;\rightarrow\; C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die inverse von C ist jetzt

$$C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = C$$

Wir können also schreiben

$$\begin{pmatrix} G_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \\ G_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} = \vec{q} = C^{-1} \cdot \vec{\varphi} = C \cdot \vec{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 + \varphi_2 \\ \\ \varphi_1 - \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Die Linearkombinationen $\xi^+ := \varphi_1 + \varphi_2$ und $\xi^- := \varphi_1 - \varphi_2$ führen also immer eine harmonische Schwingung durch! Dies ist genau das gleiche was wir im Abschnitt 2.4 benutzt haben um das Problem zu lösen![12]

[11] Damit es schöner aussieht. Wir verlieren hier keine allgemeinen Lösungen da wir das ganze sowieso mit den schon vorhandenen Konstanten G_1, G_2 multiplizieren werden.

[12] Diese Eigenschaft tritt natürlich nicht immer auf. Dass das hier zweimal vorgekommen ist liegt an der Ähnlichkeit der beiden Systeme