Introduction à la réduction de Lyapunov-Schmidt

Stilianos Louca

3 février 2011

Dans cet article, on s'intéresse à la méthode de Lyapunov-Schmidt, appliquée à la bifurcation des solutions des équations non-linéaires sur des espaces de Banach. Le matériel est basé sur les lectures *Systèmes Dynamiques et Bifurcations* données par Prof. Guillaume JAMES à l'UJF pendant l'année 2010/2011.

Déclaration du problème

On suppose que E, Λ, H sont des espaces de Banach. On se donne une fonction $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^k(E \times \Lambda, H)$ (avec $k \in \mathbb{N}$ assez grand) et suppose que $\mathcal{F}(0,0) = 0$. On cherche alors les paires $(x, \lambda) \in E \times \Lambda$ dans un voisinage suffisamment petit de $(0,0)$ satisfaisant $\mathcal{F}(x, \lambda) = 0$.

On note $L := \partial_1 \mathcal{F}\big|_{(0,0)}$. En supposant que $L \in \mathcal{L}(E, H)$ est inversible, on sait par le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un voisinage $U \times V \subseteq E \times \Lambda$ de $(0,0)$ et une fonction $\chi \in \mathcal{C}^k(U, V)$ telle que pour tout $(x, \lambda) \in U \times V$ on a

$$\mathcal{F}(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \chi(\lambda) \quad .$$

Le problème se complique considérablement dans le cas où L n'est pas inversible, surtout si E, Λ, H sont de dimension infinie.

On suppose dans la suite que [1] :

- $\ker(L)$ possède dans E le supplément E_0.
- $L(E)$ possède dans H le supplément H_0, telle que la projection $\mathcal{P} : H \to H_0$ parallèlement à $L(E)$ est de $\mathcal{C}^1$.

La réduction de Lyapunov-Schmidt

On commence par la décomposition

$$E = \ker(L) \oplus E_0 \quad , \quad H = L(E) \oplus H_0$$

comme postulée dans les hypothèses. Le problème $\mathcal{F}(x, \lambda) = 0$ pour $(x, \lambda) \in E \times \Lambda$ se traduit en

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(x_0 + \overline{x}_0, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \tag{0.1}$$

et

$$(\mathrm{Id}_H - \mathcal{P})\mathcal{F}(x_0 + \overline{x}_0, \lambda) =: G(x_0, \overline{x}_0, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad , \tag{0.2}$$

avec $x = x_0 + \overline{x}_0$ et $x_0 \in \ker(L)$, $\overline{x}_0 \in E_0$. Noter que $G : \ker(L) \times E_0 \times \Lambda \to L(E)$ et que

$$\partial_2 G\big|_{(0,0,0)} = L\big|_{E_0} : E_0 \to L(E)$$

est inversible. Donc, (0.2) se résout localement à $(0,0,0)$, c'est-à-dire il existe un voisinage

$$U \times V \times \Omega \subseteq \ker(L) \times E_0 \times \Lambda$$

et une fonction $\varphi : U \times \Omega \to V$ de la classe $\mathcal{C}^k$ telle que pour tout $(x_0, \overline{x}_0, \lambda) \in U \times V \times \Omega$ on a

$$G(x_0, \overline{x}_0, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_0 = \varphi(x_0, \lambda) \quad .$$

1. Noter qu'en cas que $\dim H < \infty$, ces hypothèses sont automatiquement réalisés, par exemple avec $E_0 := [\ker(L)]^{\perp}$ et $H_0 := \ker(L^{\dagger}) = [L(E)]^{\perp}$.

Alors, (0.1) se traduit en

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(x_0+\varphi(x_0,\lambda),\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad , \tag{0.3}$$

qui, donnée φ, est une équation algébrique en les variables $x_0 \in U \subseteq \ker(L)$ et $\lambda \in \Omega \subseteq \Lambda$. Dans le cas spécial que $\Lambda = \mathbb{R}$ et $\ker(L) \cong \mathbb{R}$, on trouve avec (0.3) une équation algébrique en les deux variables réelles $x_0 \in U, \lambda \in \Omega$, dont les solutions (x_0, λ) donnent via $(x,\lambda) := (x_0+\varphi(x_0,\lambda),\lambda)$ les solutions locales pour le problème du but $\mathcal{F}(x,\lambda) = 0$.

Le problème principal est plus souvent la supputation de la fonction φ. Néanmoins, les dérivées de G à $(0,0,0)$ donnent très souvent des informations sur les dérivées de φ à $(0,0)$ et donc des approximations polynomiales pour φ. En particulier, on a $\varphi(0,0) = 0$ et

$$\varphi'\big|_{(0,0)} = -\left[L\big|_{E_0}\right]^{-1} \circ \partial_{(1,3)}G\big|_{(0,0,0)} \quad .$$

Exemple

Considérons l'espace

$$E := \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1]) : f'(0) = 0 = f'(1)\right\} \quad .$$

On cherche à résoudre l'équation $\mathcal{F}(f,\lambda) = 0$, où

$$\mathcal{F} : E \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\Lambda} \to \underbrace{\mathcal{C}^0([0,1])}_{H} \quad , \quad \mathcal{F}(f,\lambda) := f'' + \lambda \cdot \sin f \quad .$$

On note que :
- $E \subseteq H \subseteq L^2([0,1])$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \equiv 0$ est une solution.
- Si $f \in E$ est une solution pour $\mathcal{F}(f,\lambda) = 0$, alors $-f$ est également.
- La dérivée $L := \mathcal{F}\big|_{(0,\lambda)}$ est donnée par $L_\lambda = \partial^2 + \lambda \in \mathcal{L}(E,H)$.
- Par rapport au produit scalaire sur L^2, on trouve que $L_\lambda = L_\lambda^\dagger\big|_E$.

On sait que pour $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ donnée, la solution dans $\mathcal{C}^2([0,1])$ (si existante) de $Lf = g$ est donnée par l'intégral de Duhamel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin\left[\sqrt{\lambda}\cdot(t-s)\right] f(s)\, ds + \alpha \cos\left[\sqrt{\lambda}\cdot t\right] + \beta \cdot \sin\left[\sqrt{\lambda}\cdot t\right] \quad ,$$

avec $f \in E$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont choisis tels que $f'(0) = 0 = f'(1)$ est satisfait. On trouve alors que L_{λ_0} est inversible ssi $\lambda_0 \neq k^2\pi^2\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, le théorème des fonctions implicites implique l'unicité locale de la solution triviale, pour λ assez proche à λ_0. Pour le cas $\lambda = k^2\pi^2$ on trouve que

$$\ker(L_{k^2\pi^2}) = \mathbb{R}\cos(k\pi\cdot) \quad , \quad L_{k^2\pi^2}(E) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]) : \int_0^1 f(s)\cos(k\pi s)\, ds = 0 \right\} = [\mathbb{R}\cos(k\pi\cdot)]^\perp \quad ,$$

où le complément orthogonale $\perp$ est pris par rapport au produit scalaire dans H. Comme $\mathbb{R}\cos(k\pi\cdot)$ est de dimension finie, il est complet et donc par A.0.1

$$E = \ker(L_{k^2\pi^2}) \oplus \underbrace{\left[(\ker_{k^2\pi^2})^\perp \cap E\right]}_{=:E_0} \quad , \quad H = \underbrace{\mathbb{R}\cos(k\pi\cdot)}_{=:H_0} \oplus L_{k^2\pi^2}(E) \quad .$$

On considère la voisinage de $\lambda \approx \pi^2$ et note

$$\lambda =: \pi^2 + \mu \quad , \quad \mathcal{F}(f,\lambda) = \underbrace{f'' + \pi^2 f}_{L_{\pi^2} f} + \underbrace{\mu \sin f + \pi^2(\sin f - f)}_{=:N(f,\mu)} \quad .$$

On cherche les solutions de la forme $f = \alpha\cos(\pi\cdot) + \overline{f}_0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\overline{f}_0 \perp \ker(L_{\pi^2})$ pour $\mu \approx 0$. Alors, (0.2) prend la forme

$$0 \stackrel{!}{=} G(\alpha, \overline{f}_0, \mu) := L_{\pi^2}\overline{f}_0 + (\mathrm{Id}_H - \mathcal{P})N(\alpha\cos(\pi\cdot) + \overline{f}_0, \mu) \quad , \tag{0.4}$$

où $\mathcal{P} : H \to H_0$ est la projection orthogonale. Comme déjà montré, on trouve que (0.4) se résout localement comme $\overline{f}_0 = \varphi(\alpha, \mu)$ pour $\overline{f}_0 \approx 0,\ \alpha \approx 0,\ \mu \approx 0$. Comme $\varphi(0, \mu) = 0$ pour tout $\mu \approx 0$ et comme

$$\varphi(\alpha, \mu) = L_{\pi^2}^{-1}(\mathcal{P} - \mathrm{Id})N(\alpha\cos(\pi\cdot) + \varphi(\alpha, \mu), \mu) \quad ,$$

on conclut que $\varphi(\alpha, \mu) \in \mathcal{O}(|\alpha|^3 + |\alpha| \cdot |\mu|)$ quand $\alpha, \mu \to 0$. D'autre part, (0.3) prend la forme

$$0 \stackrel{!}{=} \int_0^1 \cos(\pi s) \cdot N(\alpha\cos(\pi s) + \varphi(\alpha, \mu), \mu)\ ds = \underbrace{\mu\alpha - \frac{\pi^2}{8}\alpha^3 + \text{h.o.t.}}_{=:f(\alpha,\mu)} \quad .$$

Le problème se ramène donc localement à l'étude de l'équation de bifurcation $f(\alpha, \mu) \stackrel{!}{=} 0$, qui comme on sait, décrit une bifurcation *Pitchfork*, donnant les solutions non-triviales par la relation

$$\mu(\alpha) = \frac{\pi^2}{8}\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

pour $\mu \gtrsim 0$. Par conséquence on trouve les deux solutions non-triviales pour $\alpha \approx 0,\ f \approx 0,\ \lambda \gtrsim \pi^2$:

$$f = \alpha\cos(\pi\cdot) + \varphi(\alpha, \mu(\alpha)) = \alpha\cos(\pi\cdot) + \mathcal{O}(|\alpha|^3) \quad .$$

Pour $\lambda \leq \pi^2$ la solution triviale $f \equiv 0$ est une solution isolée.

A Appendix

A.0.1 Rappel - Décomposition d'un espace préhilbertien

Si $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien et $A \subseteq \mathcal{H}$ un sous-espace complet de $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H} = A \oplus A^\dagger$. La projection $\mathcal{P}_A : \mathcal{H} \to A$ parallèlement à $A^\perp$ est appelée *projection orthogonale à A*.

Preuve : Conséquence du théorème de projection sur un convexe complet dans un préhilbertien.

A.0.2 Proposition sur compléments orthogonaux

Si $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien et $A \subseteq \mathcal{H}$ un sous-espace complet de $\mathcal{H}$, alors $(A^\perp)^\perp = A$.

Preuve : Evidement si $x \in A$, alors $x \in (A^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in (A^\perp)^\perp$, avec $x = x_0 + \overline{x}_0$ où $x_0 \in A$ et $\overline{x}_0 \in A^\perp$ (voir A.0.1). Alors, $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in A^\perp$, en particulier $\langle x, \overline{x}_0\rangle = 0$, ce qui implique que $\overline{x}_0 = 0$ et donc $x \in A$.

$\square$