# Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

## FSU Jena - WS 2007/2008

## Übungsseries 14

Dr. W. Nagel

---

**Aufgabe 01 - Zufällige eindimensionale Irrfahrt**

Ein Teilchen bewegt sich entlang der reellen Achse in Sprüngen der Länge 1 nach rechts (d.h um $+1$) oder nach links (d.h um -1). In jedem Zeitintervall $(n-1, n],\ n \in \mathbb{N}$ findet genau ein Sprung statt. Unabhängig vom Zeitpunkt und unabhängig von den anderen Sprüngen seien die Wahrscheinlichkeiten in jedem der angegebenen Zeitintervalle

$$P(\text{„}\textit{Sprung nach rechts}\text{"}) = p\ ,\ P(\text{„}\textit{Sprung nach links}\text{"}) = 1-p\ ,\ 0 < p < 1$$

a) Berechnen Sie die Verteilungen der Zufallsgrößen
$X_n$ : Position des Teilchens nach $n$ Sprüngen, falls das Teilchen zum Zeitpunkt 0 im Ort 0 startet, $n \in \mathbb{N}_0$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Position des Teilchens nach $n$ Schritten.

c) Wenden Sie den zentralen Grenzwertsatz an, um für $p = 1/2$ einen zu 0 symmetrischen Bereich zu approximieren, in dem sich das Teilchen nach $n$ Schritten ('$n$' groß) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% aufhält. Skizzieren Sie diesen Bereich in Abhängigkeit von $n$.

**Aufgabe 02**

Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch eine Zufallsgröße mit unbekanntem Erwartungswert $\mu$ und einer Varianz $\sigma^2 = 0.01$ [Maßeinheiten$^2$] angemessen beschrieben werden kann. Wie viele getrennte Messungen (ohne gegenseitige Beeinflussung der Ergebnisse) sind durchzuführen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel der Messwerte und $\mu$ kleiner als 0.02 [Maßeinheiten$^2$] ist?

a) Beantworten Sie diese Frage durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung.

b) Geben Sie einen Näherungswert für die gesuchte Anzahl an, indem Sie den zentralen Grenzwertsatz anwenden.

**Aufgabe 03**

(*Für diejenigen, die den Unterschied zwischen Konvergenzarten besser verstehen wollen.*)

1. Beispiel: (Vgl. Irle, A.:Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Teubner 2001, S. 178)
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert in W. gegen 0, sie ist aber nicht fast sicher konvergent.

2. Beispiel:
Betrachten Sie die Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, ..$ mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n+1)}\ ,\ P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

Es wird vorausgesetzt, dass dies eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen ist. Zeigen Sie, dass für diese Folge gilt:
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergiert für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0, aber nicht fast sicher.
(*Hinweis:* Die Funktion $g$ mit $g(x) = \frac{x}{\ln(x+1)}$ ist auf dem Intervall $[1, \infty)$ streng isoton.)