Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

FSU Jena - WS 2007/2008

Übungsserie 09

Dr. W. Nagel

Aufgabe 01

Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$, das heißt $X \sim U(0,1)$. Berechnen Sie Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichten folgender Zufallsgrößen:

$$1 - X \ , \ X - 1 \ , \ X^2 \ , \ \frac{1}{X} \ , \ -2 \ln X$$

02 - Ziegenproblem

Bei einem Fernseh-Gewinnspiel gibt es folgende Konstellation: Es sind drei geschlossene Türen aufgebaut, und hinter genau einer dieser Türen steht ein Preis ("Ziege"). Ein Kandidat, der den Preis gewinnen möchte, aber natürlich die richtige Tür nicht kennt, kann eine Tür auswählen, die aber zunächst nicht geöffnet wird. Daraufhin stellt sich der Quizmaster (der die richtige Tür kennt), vor eine andere Tür, und erklärt wahrheitsgemäß, dass der Preis nicht dahinter steht. Nun kann der Kandidat sich entscheiden: Er kann die Tür öffnen, vor der er bereits steht, oder er kann noch einmal wechseln und die andere Tür öffnen, vor der weder er steht noch der Quizmaster. Der Kandidat bekommt den Preis, wenn er die richtige Tür öffnet. Was ist für den Kandidaten die bessere Strategie: Die Tür noch einmal zu wechseln oder die anfangs gewählte Tür zu öffnen?
Hinweis: Zwingen Sie sich, einen Wahrscheinlichkeitsraum anzugeben und sich klar zu machen, was Sie als zufallsabhängig betrachten wollen und was nicht.

03 - Silvesteraufgabe

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Flugzeug auf einer bestimmen Strecke ein Motor ausfällt, sei p. Bei mehrmotorigen Flugzeugen wird angenommen, dass die Motoren unabhängig von einander ausfallen. Ein Flugzeug ist flugfähig, wenn wenigstens die Hälfte seiner Motoren arbeitet. Für welche Werte von p ist ein zweimotoriges Flugzeug einem viermotorigen vorzuziehen?

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln aus der Kombinatorik:

Es seien A und B endliche Mengen und $|A| = n$, $|B| = m$ die Anzahlen ihrer Elemente.

(1) Es gibt $n!$ Permutationen der Elemente von A (=Anzahl der möglichen Anordnungen = Anzahl der n-Tupel von Elementen von A, wobei jedes Element genau einmal vorkommt).

(2) $|A \times B| = n \cdot m$

(3) $\left|A^k\right| = n^k$ für $k \in \mathbb{N}$ (=Anzahl der k-Tupel von Elementen aus A = Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge nacheinander k Elemente zu entnehmen, "mit Wiederholung/Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge").

(4) $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ = Anzahl der k-Tupel von Elementen aus A, wobei jedes Element höchstens einmal vorkommt (= Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge nacheinander k Elemente zu entnehmen, "ohne Wiederholung/Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge").

(5) $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ = Anzahl der k-elementigen Teilmengen von A (=Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge nacheinander k Elemente zu entnehmen, "ohne Wiederholung/Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge").

(6) $\binom{n+k-1}{n-1}$ = Anzahl der Möglichkeiten, in n nummerierte Schubfächer k nicht unterschiedene Gegenstände zu legen (= Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge nacheinander k Elemente zu entnehmen, "mit Wiederholung/Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihefolge").