Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

FSU Jena - WS 2007/2008

Übungsserie 08

Dr. W. Nagel

Aufgabe 01

Die Verteilung einer Zufallsgröße X heißt logarithmische Normalverteilung (oder Lognormalverteilung), wenn $\ln X$ normalverteilt ist. Bestimmen Sie die Dichtefunktion aller Lognormalverteilungen.

Aufgabe 02 (Bertrandsches Paradoxon)

Auf einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 wird zufällig eine Gerade geworfen. Dabei entsteht eine Sehne mit einer zufälligen Länge L. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $L > \sqrt{3}$. (Die Größe $\sqrt{3}$ ist die Seitenlänge eines in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Der Abstand der Seiten dieser gleichseitigen Dreiecke von 0 ist $1/2$.) Man kann es (auf den ersten Blick) als paradox empfinden, dass die folgenden drei Lösungen auf drei unterschiedliche Werte für die gesuchte Wahrscheinlichkeit führen.

(i) Die Sehne und damit Ihre Länge sind bereits eindeutig durch die Lage ihres Mittelpunktes bestimmt. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn der Mittelpunkt in den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $1/2$ fällt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist offensichtlich $1/4$.

(ii) Die Sehne und damit Ihre Länge sind eindeutig durch die Lage der beiden Schnittpunkte mit dem Rand des Kreises bestimmt. Jeder Punkt auf dem Rand des Kreises lässt sich durch einen Winkel aus $[0, 2\pi]$ beschreiben. Das zufällige Werfen zweier Schnittpunkte auf dem Kreisrand entspricht also dem Werfen eines zufälligen Punktes in das Quadrat $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn bei gegebener Lage des ersten Schnittpunktes auf der Kreislinie der zweite Schnittpunkt 'in das gegenüberliegende Drittel' der Kreislinie fällt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit als $1/3$.

(iii) Die Sehne und damit ihre Länge sind eindeutig durch den abstand der Sehne von 0 und durch ihre Richtung (oder den Winkel mit der positiven Abszissenachse des Lots von 0 auf die Sehne) gegeben. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn der Abstand der Sehne kleiner als $1/2$ ist. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also $1/2$.

Wieso kann man aus den obigen Lösungen nicht den paradoxen Schluss ziehen, dass $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ ist? Berechnen Sie eine Verteilungsdichte des Abstands der zufälligen Sehne von 0 für jeden der drei Lösungsansätze.