

Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

FSU Jena - WS 2007/2008

Übungsserie 06

Dr. W. Nagel

Aufgabe 01

Beweisen Sie Satz 2.6 der Vorlesung (wenigstens den Teil a).

Aufgabe 02

Zeigen Sie: Wenn X eine Cauchy-Verteilte Zufallsgröße ist, dann ist auch die Zufallsgröße $1/X$ Cauchy-verteilt.

Aufgabe 03

Die Zufallsgröße sei gleichverteilt auf $(0, 1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, bei dem

- die erste Dezimalstelle eine 1 ist?
- die zweite Dezimalstelle eine 5 ist?
- die erste Dezimalstelle der Quadratwurzel eine 3 ist?

Aufgabe 04 (Buffons Nadelproblem)

Eine Nadel der Länge l wird *zufällig* auf eine Ebene mit einer Schar paralleler äquidistanter Geraden mit dem Abstand $d > l$ geworfen. Es wird beobachtet, ob die Nadel eine der Geraden schneidet oder nicht.

Buffon hat im 18 Jh. daraus ein Verfahren abgeleitet, die Zahl π statistisch zu schätzen. Um dies zu verstehen, berechne man die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Nadel schneidet eine Gerade})$.

Diese Formel findet auch heute Anwendung (in der Bildverarbeitung) zur Schätzung von Längen (l), basierend auf der Zählung von Schnittpunkten.

Hinweis: Zur Konstruktion eines w-theoretischen Modells für den Nadelwurf eignet sich ein W-Raum $[\Omega, \mathcal{B}, P]$ mit

$$\Omega = [0, d/2] \times [0, \pi/2]$$

Dabei entspricht dem Punkt $(x, \alpha) \in \Omega$ eine Nadel, deren Mittelpunkt den Abstand x zur nächstgelegenen Geraden hat und die mit der Richtung der Geraden den Winkel α bildet.

Für Experimentatoren: Bestimmen Sie für eine Versuchsserie die relative Häufigkeit der Würfe, bei denen die Nadel eine der Geraden schneidet (oder führen Sie eine entsprechende Computersimulation durch). Überlegen Sie sich, wie man aus dieser relativen Häufigkeit die Länge l der Nadel schätzen könnte, wenn diese unbekannt wäre. Vergleichen Sie Ihr Schätzergebnis mit der wirklichen Länge der Nadel.

05 - Adventsaufgabe

Aus einem gut durchmischten Teig, der genau 100 Rosinen enthält, wird ein Kuchen gebacken, der in 20 Stücke gleicher Größe zerschnitten wird. Unter der Annahme, dass die Orte der als punktförmig dargestellten Rosinen voneinander unabhängig und jeweils gleichverteilt im gesamten Kuchen volumen sind, soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein zufällig ausgewähltes Stück Kuchen genau 5 Rosinen enthält.