Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

FSU Jena - WS 2007/2008

Übungsserie 05

Dr. W. Nagel

Aufgabe 01

Zwei Volumina mit den Inhalten V_1, V_2 kommunizieren durch eine Öffnung. Sie enthalten insgesamt n Moleküle ohne Wechselwirkung. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in dem Volumen V_1 genau k Moleküle befinden, gleich $(1+\gamma)^{-n}\binom{n}{k}\gamma^k$ ist, wobei $\gamma = V_1/V_2$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 02

Es seien $X_1, .., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen. Außerdem seien $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$ messbar sind, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass dann auch $g_1(X_1)$ und $g_2(X_2)$ unabhängige Zufallsgrößen sind.

Aufgabe 03

Eine Fluggesellschaft hat die langjährige Erfahrung gemacht, dass nur 95% der Gesamtzahl der Personen, die sich einen Platz reservieren ließen, zum Abflug erschienen. Deshalb verkauft die Gesellschaft für ein Flugzeug, das 95 Plätze hat, 100 Tickets. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass alle Personen, die zu einem bestimmten Abflug erscheinen, einen Platz bekommen? Bestimmen Sie sowohl die exakte Lösung (unter der Annahme, dass alle Ticket-Inhaber ihre Entscheidungen unabhängig von einander und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit treffen) als auch eine Näherungslösung mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 04

Es sei X eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsgröße, und es gelte $P(X \geq l) > 0$ für alle $l \geq 0$ sowie für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$P(X \geq k + l \mid X \geq k) = P(X \geq l)$$

Man bestimme die möglichen Verteilungsgesetze von X.

Aufgabe 05

Es seien $a \in \mathbb{R}$ und X eine Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass X und a stochastisch unabhängig sind (wenn a als Zufallsgröße interpretiert wird, die über demselben W-Raum $[\Omega, \mathcal{U}, P]$ wie X definiert ist).