

Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker

FSU Jena - WS 2007/2008

Übungsserie 02

Dr. W. Nagel

Aufgabe 01

Acht Kugeln fallen "rein zufällig" und unabhängig von einander in drei Fächer. Geben Sie einen passenden W-Raum an, so dass Sie die folgende Frage beantworten können: Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Fach leer?

Aufgabe 02

Beweisen Sie Folgerung 1.2 der Vorlesung.

Aufgabe 03

Beim Wurf einer Münze erscheine mit W. $\frac{1}{2}$ entweder Kopf oder Zahl. Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Würfeln, bei der mit W. größer oder gleich 0.95 wenigstens einmal Kopf und einmal Zahl erscheint.

Aufgabe 04

Es seien $[\mathbb{R}, \mathcal{R}, P]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und F die Verteilungsfunktion von P . Drücken Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten von Intervallen mit Hilfe der Verteilungsfunktion aus:

$$P((a, b)), P((a, b]), P([a, b)), P([a, b])$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Wie können diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer Verteilungsdichte ausgedrückt werden, falls eine existiert?

Aufgabe 05 - Zusatzaufgabe

Es seien $[\Omega, \mathcal{U}, P]$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$. Man definiert den oberen bzw. den unteren Limes dieser Mengenfolge als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

- Zeigen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$
- Charakterisieren Sie die Elemente des unteren bzw. oberen Limes in Bezug auf ihre Zugehörigkeit zu den Mengen A_n , $n \in \mathbb{N}$
- Bestimmen Sie $(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$ und $(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$
- Zeigen Sie, dass aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

stets

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

folgt. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? (Lemma von Borel-Cantelli)