Statistische Verfahren
FSU Jena - SS 2010
Aufgabenblatt 01 - Lösungen

Stilianos Louca

April 21, 2010

Aufgabenstellung

Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Exponential-Dispersiv*, falls sich die Dichten $\{f_{\vartheta,\varphi}\}_{\vartheta,\varphi}$ ihrer Verteilungen (bzgl. Lebesgue-Maß bzw. Zählmaß) auf ihrem (gemeinsamen) Träger durch

$$f_{\boldsymbol{\vartheta},\varphi}(\mathbf{y}) = \exp\left[\frac{\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\vartheta} - A(\boldsymbol{\vartheta})}{\varphi} - C(\mathbf{y},\varphi)\right] \quad , \quad \varphi \neq 0$$

darstellen lassen, wobei φ bzw. $\boldsymbol{\vartheta}$ reelle bzw. $\mathbb{R}^n$-wertige Parameter und A, C reelle Funktionen sind ($\boldsymbol{\vartheta}$ ist natürlicher Parameter). Bestimmen sie unter folgenden Verteilungsfamilien die Exponential-Dispersiven:

1. Normalverteilung
2. Exponentialverteilung
3. Gleichverteilung
4. Poissonverteilung
5. Binomialverteilung
6. χ^2-Verteilung
7. Γ-Verteilung
8. Studentsche Verteilung
9. Rayleigh Verteilung

Lösung

Wir beachten zunächst folgende Tatsachen:

- Eine Verteilungsfamilie ist genau dann Exponential-Dispersiv (E.D.), falls ihre Dichten sich gemäß

$$f_{\boldsymbol{\vartheta},\lambda}(\mathbf{y}) = h(\mathbf{y},\lambda)\cdot\exp\left[\lambda\left(\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\vartheta} - A(\boldsymbol{\vartheta})\right)\right] \quad , \quad \lambda \neq 0$$

  darstellen lassen, wobei $h(\cdot,\lambda)$ einen von λ unabhängigen Träger besitzt.

- Ist φ : const, so lassen sich die Dichten auch stets gemäß

$$f_{\boldsymbol{\vartheta}}(y) = h(\mathbf{y})\cdot\exp\left[\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\vartheta} - A(\boldsymbol{\vartheta})\right] = \exp\left[\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\vartheta} - A(\boldsymbol{\vartheta}) - C(\mathbf{y})\right]$$

  darstellen.

1. Normalverteilung **ist** E.D., mit Dichte

$$f_{\mu,\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \underbrace{\frac{\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}_{h} \cdot \exp\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(y \cdot \mu - \frac{\mu^2}{2}\right)\right]$$

und $\lambda := 1/\sigma^2,\ \vartheta := \mu,\ A(\vartheta) = \vartheta^2/2$.

2. Exponentialverteilung **ist** E.D., mit Dichte

$$f_\lambda(y) = 1_{[0,\infty)}(y) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda y} = 1_{[0,\infty)}(y) \cdot e^{-(\lambda y - \ln\lambda)}$$

und $\vartheta = \lambda,\ A(\vartheta) = \ln\vartheta,\ \varphi = -1$.

3. Die Gleichverteilung ist **nicht** E.D., da im Gegensatz zur E.D. Verteilungen ihr Träger von ihrem Breiten-Parameter abhängt.

4. Poissonverteilung **ist** E.D., mit Dichte

$$f_\lambda(y) = 1_{\mathbb{N}_0}(y) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \exp\left[y\ln\lambda - \lambda - \ln y!\right]$$

und $\varphi = 1,\ \vartheta = \ln\lambda,\ A(\vartheta) = e^\vartheta,\ C(y,\varphi) = -\ln y!$.

5. Binomialverteilung $\mathcal{B}_{n,p}$ ist **nicht** E.D., da ihr Träger $\{0,..,n\}$ vom Parameter n abhängt.

   Nimmt man allerdings n konstant an, sprich einziger Parameter ist p, so **ist** $\mathcal{B}_{n,p}$ (n : const) E.D. mit Dichte

$$f_p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \underbrace{\binom{y}{n}}_{h(y)} \cdot \exp\left[y \cdot \underbrace{\ln\frac{p}{1-p}}_{\vartheta} + \underbrace{n\ln(1-p)}_{-A(\vartheta)}\right]$$

6. χ^2-Verteilung, mit Dichte

$$f_n(y) = 1_{[0,\infty)}(y) \cdot \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot y^{n/2-1}e^{-y/2}$$

   ist **nicht** E.D., denn wäre

$$f_n(y) = 1_{[0,\infty)}(y) \cdot h(y)\exp\left[y\vartheta - A(\vartheta)\right] \quad ,$$

   (beachte dass Familie nur einparametrisch ist) (mit $\vartheta = \vartheta(n)$) so gälte

$$e^{-A(\vartheta)} = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \exp\left[-y\vartheta + \left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\ln y\right] \cdot \frac{e^{-y/2}}{h(y)}$$

   sprich $\exp\left[-y\vartheta(n) + \left(\frac{n}{2}-1\right)\ln y\right]$ wäre separierbar in n und y Teil, ein Widerspruch!

7. Γ-Verteilung **ist** E.D. mit Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(y) = 1_{(0,\infty)}(y) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\beta y} = 1_{(0,\infty)}(y) \cdot \exp\left[-\beta y + (\alpha-1)\ln y + \alpha\ln\beta - \ln\Gamma(\alpha)\right]$$

$$= 1_{(0,\infty)}(y) \cdot \exp\left[a\left(-\frac{\beta}{a}y + \ln\frac{\beta}{\alpha}\right) + \underbrace{a\ln a + (a-1)\ln y - \ln\Gamma(a)}_{-C(y,\varphi)}\right]$$

   und $\vartheta = -\beta/a,\ \varphi = 1/a,\ A(\vartheta) = \ln\frac{\beta}{\alpha}$..

8. Studentsche Verteilung mit Dichte

$$f_\nu(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

ist **nicht** E.D., denn wäre

$$f_\nu(y) = h(y) \exp\left[\vartheta y - A(\vartheta)\right]$$

(beachte dass $\lambda = \text{const}$ bzw. $\vartheta = \vartheta(\nu)$), dann gälte

$$h(y) \cdot \frac{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} e^{-A(\vartheta)} = \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \cdot e^{-\vartheta(\nu)\cdot y}$$

das heißt $\left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \cdot e^{-\vartheta y}$ wäre trennbar in ν und y Teil, in Widerspruch!

9. Rayleigh Verteilung mit Dichte

$$f_{\sigma^2}(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] = \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2} + \ln y - \ln \sigma^2\right]$$

ist **nicht** E.D., denn wäre

$$f_{\sigma^2}(y) = \exp\left[\vartheta y - A(\vartheta) - C(y)\right] \quad , \quad \vartheta = \vartheta(\sigma^2)$$

so gälte

$$A(\vartheta) + C(y) = \vartheta y + \frac{y^2}{2\sigma^2} - \ln y + \ln \sigma^2$$

was nicht sein kann.