Spektraltheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

28. Juli 2008

Aufgabe 07

Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$Tx_m = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{\langle x_m, x_k \rangle}_{\delta_{mk}} x_k = \lambda_m x_m$$

das heißt jedes x_m ist Eigenvektor von T zum Eigenwert λ_m. Somit gilt für den Eigenraum $E_{\lambda_m}(T)$:

$$E_{\lambda_m}(T) \supset \operatorname{span}\{x_k : \lambda_k = \lambda_m\}$$

Seien nun $0 \neq x \in \mathcal{H},\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $Tx = \lambda x$, das heißt $x \in E_\lambda(T)$, dann folgt:

$$0 = \frac{1}{|\lambda|^2} \|\lambda x - Tx\|^2 = \left\| x - T\frac{x}{\lambda} \right\|^2 = \left\| x - \sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_k \left| \frac{\lambda_k}{\lambda} \langle x, x_k \rangle - \langle x, x_k \rangle \right|^2 = \|x^2\| - \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \cdot \left[1 - \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda} \right|^2 \right]$$

$$\Rightarrow \ \|x\|^2 = \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \cdot \underbrace{\left[1 - \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda} \right|^2 \right]}_{\substack{=1 \text{ für } \lambda = \lambda_k \\ <1 \text{ für } \lambda \neq \lambda_k}} = \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda}} |\langle x, x_k \rangle|^2 + \sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq \lambda}} |\langle x, x_k \rangle|^2 \cdot \underbrace{\left[1 - \left| 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda} \right|^2 \right]}_{<1} \leq \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|x\|^2$$

Somit ist

$$\|x\|^2 = \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda}} |\langle x, x_k \rangle|^2$$

Demnach muss $\lambda = \lambda_m$ für ein geeignetes m sein (vgl. Aufgabenteil b), sonst wäre der rechte Ausdruck 0, das heißt

$$\|x\|^2 = \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda_m}} |\langle x, x_k \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \left\| x - \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda_m}} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda_m}} |\langle x, x_k \rangle|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda_m}} \langle x, x_k \rangle x_k \in \operatorname{span}\{x_k : \lambda_k = \lambda_m\}$$

Demnach ist für $\lambda_m \neq 0 : E_{\lambda_m}(T) \subset \operatorname{span}\{x_k : \lambda_k = \lambda_m\}$ also

$$E_{\lambda_m}(T) = \operatorname{span}\{x_k : \lambda_k = \lambda_m\}$$

$\square$