Spektraltheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

28. Juli 2008

Aufgabe 05

Richtung "⇒"

Sei $x_n \rightharpoonup x$, das heißt

$$\forall\ a \in E' : \langle x_n, a\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, a\rangle$$

Für jedes $a \in E'$ ist die Folge $\langle x_n, a\rangle$ also in $\mathbb{R}$ konvergent, und somit bekanntlich beschränkt, das heißt für alle $a \in E'$

$$\exists\ \rho_a : |\langle x_n, a\rangle| \le \rho_a\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Somit ist die Menge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schwach beschränkt, und nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auch beschränkt. Ferner ist für $B := E'$ insbesondere $\operatorname{span}\{B\} = B = E'$ dicht in E' und definitionsgemäß

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, b\rangle = \langle x, b\rangle \quad \forall\ b \in B$$

Richtung "⇐"

Es sei (x_n) beschränkt und $B \subset E'$ so dass $\operatorname{span}\{E\}$ dicht in E' liegt und

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, b\rangle = \langle x, b\rangle \quad \forall\ b \in B$$

Sei nun $a \in E', \varepsilon > 0$ beliebig. Da $\{x_n\}$ beschränkt ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $\sup\limits_n \|x_n - x\| < \rho$ und ferner ein $\delta > 0$ mit $\rho \cdot \delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dann existiert wiederum ein $b \in \operatorname{span}\{B\}$ mit $\|a - b\| < \delta$ und $c_i \in B, \lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $b = \sum\limits_i \lambda_i c_i$ und

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, c_i\rangle = \langle x, c_i\rangle$$

Bekanntlich ist dann

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, b\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle x_n, \sum_i \lambda_i c_i \right\rangle = \sum_i \lambda_i \lim_{n\to\infty} \langle x_n, c_i\rangle = \sum_i \lambda_i \langle x, c_i\rangle = \langle x, b\rangle$$

das heißt es geht auch $\langle x_n, b\rangle \to \langle x, b\rangle$.

Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\langle x_n - x, b\rangle| < \dfrac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n \ge n_0$, so dass für $n \ge n_0$ folgt:

$$|\langle x_n, a\rangle - \langle x, a\rangle| \overset{\text{Linearität}}{=} |\langle x_n - x, a\rangle| = |\langle x_n - x, a - b\rangle - \langle x_n - x, b\rangle|$$

$$\le |\langle x_n - x, a - b\rangle| + |\langle x_n - x, b\rangle| \le \underbrace{\underbrace{\|x_n - x\|}_{<\rho} \cdot \underbrace{\|a - b\|}_{<\delta}}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\langle x_n - x, b\rangle|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

das heißt es geht auch $\langle x_n, a\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, a\rangle$. Somit geht $x_n \rightharpoonup x$. $\quad\square$

Aufgabe 06

Definieren die positiven, stetigen, sublinearen Funktionale auf dem Banachraum E:

$$f_i : E \to \mathbb{R} \ , \ f_i(x) := \|T_i x\| \ , \ i \in I$$

Nach Voraussetzung gilt für diese:

$$\forall \ x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i x\| = \sup_{i \in I} f_i(x) < \infty \ \rightarrow \ \{f_i(x) \mid i \in I\} \ \text{beschränkt}$$

Dann existiert nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit eine positive Zahl ρ, mit

$$f_i(x) = \|T_i x\| < \rho \cdot \|x\| \ \ \forall \ i \in I, \ x \in E$$

Insbesondere also

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \sup_{i \in I} \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\|T_i x\|}_{< \rho \cdot \|x\|} < \rho \cdot \sup_{i \in I} \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|}_{1} = \rho < \infty$$

$\square$