Spektraltheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

4. Juni 2008

Aufgabe 02

Substituieren

$$\alpha_k := \frac{|\xi_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad \beta_k := \frac{|\eta_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Dann folgt mit der Young-Ungleichung

$$\alpha_k\beta_k \leq \frac{\alpha_k^p}{p} + \frac{\beta_k^q}{q}$$

die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^q$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\overbrace{|\xi_k|\,|\eta_k|}^{|\xi_k\eta_k|} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p + \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \square$$

Aufgabe 03

Für $p > 1$ sei $q > 1$ so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Dann folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k| \cdot |\xi_k + \eta_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \, |\xi_k + \eta_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \, |\xi_k + \eta_k|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\overset{(p-1)q=p}{=} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bemerkung: Für $p = 1$ gilt die Ungleichung ohnehin (Dreiecksungleichung).

Aufgabe 04

Seien o.B.d.A $\xi_k \neq 0$. Damit die ξ_k absolut konvergent sind, muss sowieso gelten $\xi_k \to 0$. Definieren somit $\overline{\xi} := \max_k\{|\xi_k|\}$.
Betrachten die Funktion $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ definiert durch

$$f(x) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Annahme: Ableitung und Summation können vertauscht werden.
Dann ist deren Ableitung gegeben durch:

$$\frac{df}{dx}(x) = f(x) \cdot \left[\frac{1}{x \sum_k |\xi_k|^x} \cdot \left(\sum_k |\xi_k|^x \ln |\xi_k| \right) - \frac{1}{x^2} \ln \left(\sum_k |\xi_k|^x \right) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)}{x^2 \sum_k |\xi_k|^x}}_{>0} \cdot \left[x \sum_k |\xi_k|^x \ln |\xi_k| - \ln \left(\sum_k |\xi_k|^x \right) \cdot \sum_k |\xi_k|^x \right]$$

Wegen

$$\ln \left(\sum_k |\xi_k|^x \right) \geq \ln \left(\overline{\xi}^x \right) = x \ln \left(\overline{\xi} \right) \ \rightarrow \ \ln \left(\sum_k |\xi_k|^x \right) \cdot \underbrace{\sum_k |\xi_k|^x}_{>0} \geq x \sum_k |\xi_k|^x \ln \left(\overline{\xi} \right) \geq x \sum_k |\xi_k|^x \ln |\xi_k|$$

ist

$$\frac{df}{dx}(x) \leq \frac{f(x)}{x^2 \sum_k |\xi_k|^x} \cdot \left[x \sum_k |\xi_k|^x \ln |\xi_k| - x \sum_k |\xi_k|^x \ln |\xi_k| \right] = 0$$

das heißt f ist monoton fallend. Somit ist klar, für $q > p \geq 1$ ist

$$f(q) \leq f(p) \quad \square$$

Variante

Der Fall $\xi_i = 0 \; \forall \; i$ ist trivial. Sei also $\xi_i \neq 0$ für irgendein i.
Betrachten zuerst den Fall

$$\left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

Dann sind alle $|\xi_i| \leq 1$ und es ist

$$\left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 = \sum_i |\xi_i|^p = \left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \overset{|\xi_i| \leq 1}{\geq} \left(\sum_i |\xi_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ist andernfalls

$$M := \left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \neq 1$$

so setzen wir $\eta_i := \dfrac{\xi_i}{M}$, so dass gilt:

$$\left(\sum_i |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

Unter Anwendung des vorigen Falls folgt

$$\left(\sum_i |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = M \cdot \left(\sum_i |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq M \cdot \left(\sum_i |\eta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i |\xi_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \square$$