Spektraltheorie

FSU Jena - SS 2008

Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

16. April 2008

Aufgabe 01

Sei zuerst $M \subset E$ präkompakt im Sinne der ersten Definition und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Elemente $x_1, .., x_n \in E$ mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$$

Seien diese o.B.d.A so dass für jedes x_i gilt $B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \cap M \neq \emptyset$. Andernfalls kann durch bloßes Streichen der "Ausreißer" das System x_i auf solch ein kleineres reduziert werden.
Für $z \in B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ ist $d(z, x_i) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Für beliebiges $y_i \in B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$, folgt

$$d(z, y_i) \leq d(z, x_i) + d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\rightarrow\; z \in B^o_{\varepsilon}(y_i)$$

und somit

$$B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subset B^o_{\varepsilon}(y_i)$$

Ersetzen wir also jedes x_i mit einem $y_i \in M \cap B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$, ist

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B^o_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B^o_{\varepsilon}(y_i)$$

mit allen $y_i \in M$, das heißt M ist Präkompakt im Sinne der 2. Definition.
Ist umgekehrt M Präkompakt im Sinne der 2. Definition so ist M insbesondere Präkompakt im Sinne der 1. Definition (klar!). $\square$