Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

6. Februar 2009

Aufgabe 23

Beginnend mit der Tolman-Oppenheimer-Volkoff Differentialgleichung für ideale Flüssigkeiten in kugelsymmetrischen Raumzeiten

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\frac{\left(1+\frac{p}{\mu c^2}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 p}{mc^2}\right)}{1-\frac{2Gm}{c^2 r}}$$

und der Anfangsbedingung

$$p(r=r_0)=0$$

(Druck verschwindet am Rand des Planeten) erhalten wir als Lösung

$$p(r) = \mu c^2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}-1}{3-\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}} \quad , \quad A := \frac{8\pi G}{3c^2}\mu$$

Fordert man dass der Druck im Zentrum nicht divergiert, so ergibt sich die Bedingung

$$\sqrt{1-Ar^2} > \frac{1}{3}$$

also

$$\boxed{r_0 \leq \frac{c}{\sqrt{3\pi G\mu}}}$$

Für die Gesamtmasse

$$m = \frac{4\pi}{3}\mu r_0^3$$

ergibt sich die Bedingung

$$M \leq \frac{4c^3}{9G}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\pi G\mu}} \approx 3.57\ \mathrm{M}_\odot$$