Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

20. Januar 2009

Aufgabe 21

Beginnend mit den ersten Integralen

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{\zeta} = A : \text{const}$$

$$r^2\dot{\varphi} = B : \text{const}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\dot{\varphi}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{\zeta}^2 + c^2 = 0$$

mit $\zeta := ct$ erhalten wir durch

$$0 = \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{B^2}{r^2} - \frac{A^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + c^2 = 0$$

die Bilanzgleichung

$$\boxed{\frac{\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{B^2}{2r^2} + \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}_{U_B(r)} = \frac{A^2}{2}} \tag{1}$$

Durch Differenzieren $\frac{d}{d\tau}$ folgt außerdem

$$\ddot{r}\dot{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\dot{r} = 0$$

Im Falle $\dot{r} \neq 0$ also

$$\boxed{\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}} \tag{2}$$

Da $\ddot{r}$ stetig von r und $\dot{r}$ abhängt, gilt dies auch für $\dot{r} = 0$. Das Feld U stellt also eine Art *effektives Potential* dar!
Ist nun r : const so gilt insbesondere

$$B^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - r^2A^2 + c^2r^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 0 \tag{3}$$

und nach Gl. 2

$$r_sc^2 \cdot r^2 - B^2 \cdot r + \frac{3}{2}r_sB^2 = 0 \tag{4}$$

Demnach

$$\boxed{B = \frac{r_sc^2r^2}{2r - 3r_s}} \tag{5}$$

und

$$\boxed{A = 2c^2 \cdot \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \cdot \frac{(2r_s - r)}{(2r - 3r_s)}} \tag{6}$$

Aufgabe 22

Betrachten die Bilanzgleichung 1 aus Aufgabe 21:

$$\dot{r}^2 = \underbrace{c^2\frac{r_s}{r} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{B^2}{r^2} - c^2}_{-2U_B(r)} + A^2 = \underbrace{A^2 - 2U_B(r)}_{\geq 0} \tag{7}$$

Betrachten nun ein Testteilchen, zunächst auf fester Kreisbahn (Radius r_0, Parameter A_0, B_0), und dementsprechend $\dot{r} = 0$ und $2U_{B_0}(r_0) = A^2$. Dieses soll nun geringfügig gestört werden, das heißt die Parameter des Systems A, B, sowie gegebenfalls die Position r des Teilchens und seine Geschwindigkeit $\dot{r}$, sollen in einer kleinen ε-Kugel von der Ursprungskonfiguration bleiben. Man fordert nun dass die Bahnkurve des Teilchens in einem endlichen Torus T_ε enthalten bleibt und $\mathrm{Vol}(T_\varepsilon) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ geht. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\left.\frac{\partial U_B}{\partial r}\right|_{r_0} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial^2 U_B}{\partial r^2}\right|_{r_0} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varkappa > 0$$

das heißt für U_{B_0} liegt in r_0 ein lokales, isoliertes Minimum vor[1]. Dies ist auch in Einklang mit der schon erwähnten Interpretation von Gl. 2. Es ergeben sich somit die Bedingungen

$$0 \stackrel{!}{=} \left.\frac{\partial U_{B_0}}{\partial r}\right|_{r_0} = \frac{c^2 r_s}{2r_0^2} - \frac{B^2}{r_0^3} + \frac{3}{2}\frac{r_s B^2}{r_0^4} \quad \Leftrightarrow \quad B^2 = \frac{c^2 r_s r_0^2}{2r_0 - 3r_s} \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = \frac{1}{r_s c^2}\left[B^2 \pm \sqrt{B^4 - 3r_s^2 c^2 B^2}\right]$$

$$0 \stackrel{!}{<} \left.\frac{\partial^2 U_{B_0}}{\partial r^2}\right|_{r_0} = -\frac{c^2 r_s}{r_0^3} + 3\frac{B^2}{r_0^4} - 6\frac{r_s B^2}{r_0^5} \quad \Leftrightarrow \quad B^2 > \frac{c^2 r_s r_0^2}{3r_0 - 6r_s} \quad \wedge \quad r_0 > 2r_s$$

Es handelt ich somit genau dann um eine stabile Kreisbahn, falls $\partial_r U$ Nullstellen hat und die 2. Bedingung erfüllt ist, das heißt

$$\boxed{B^2 \geq 3r_s^2 c^2 \quad \wedge \quad r_0 > 3r_s} \tag{8}$$

Bemerkungen:

- Zu erkennen ist dass mit $B = 3r_c^2 c^2$ keine stabile Kreisbahn existieren kann, da es sich bei dem entsprechenden Radius $r_0 = 3r_s$ um einen Sattelpunkt von U handelt. Die Kreisbahn ist instabil. Für alle anderen $r \in (r_s, \infty)$ ist dann $\partial_r U$ tatsächlich positiv[2]. Eine kleine Störung würde zur einem Kollaps des Teilchens in den Ursprung führen.

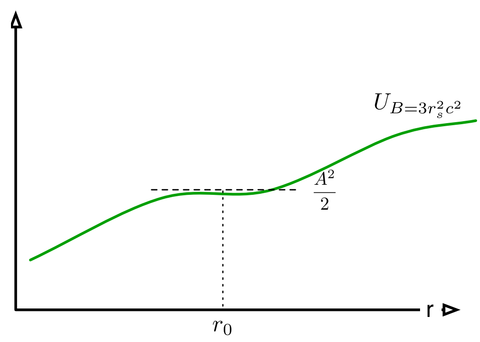

Abbildung 1: Verlauf von U_B für $B > 3r_s^2 c^2$.

- Ist $B^2 > 3r_s^2 c^2$ so existieren zwei Nullstellen von $\partial_r U$. Da jedoch nur eine der beiden ein Minimum von U darstellen kann, muss die andere ein Maximum sein. Man kann sich überzeugen dass es sich dabei um den kleineren Radius handelt: Er entspricht einer instabilen Kreisbahn.

[1] Hier wurde angenommen dass sich das qualitative Verhalten von U_B um r_0 bei genügend kleinen Störungen nicht ändert.

[2] Dies kann man sich leicht klarmachen, durch Betrachtung von $\lim_{r\to r_s^+} U(r)$ und $U(r)$ für genügend große r, unter Beachtung dass U in (r_s, ∞) nur eine Nullstelle hat.

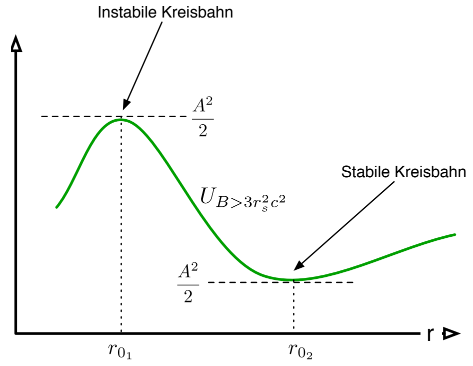

Abbildung 2: Verlauf von U_B für $B > 3r_s^2c^2$.

- Ist $B^2 < 3r_s^2c^2$, so existieren keine Nullstellen von $\partial_r U$ und somit keine Kreisbahnen. Je nach Energie $A^2/2$ divergieren die Teilchen ins ∞ oder Kollabieren in den Ursprung.

Divergenz von Bahnen

Damit überhaupt ein Testteilchen ins ∞ geraden kann, muss gelten

$$\underbrace{\lim_{r\to\infty} 2U(r)}_{c^2} \leq A^2$$

also ausreichend *Energie* vorhanden sein. Um solch eine Bahnkurve durch eine kleine Störung einer Kreisbahn anzunehmen, muss das Potential U_B dort ein isoliertes, lokales Maximum besitzen (vgl. Abb. 2).