Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

26. Januar 2009

Aufgabe 19

Der Krümmungstensor R

Beginnend mit

$$R^s_{ijk} = \partial_j \Gamma^s_{ki} - \partial_k \Gamma^s_{ji} + \Gamma^s_{jr}\Gamma^r_{ki} - \Gamma^s_{kr}\Gamma^r_{ji}$$

und den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r-r_s}\right] \ , \ \Gamma^1_{22} = r_s - r \ , \ \Gamma^1_{33} = \sin^2\vartheta\,(r_s - r) \ , \ \Gamma^1_{44} = \frac{r_s}{2}\frac{(r-r_s)}{r^3}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \ , \ \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \ , \ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta$$

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r-r_s} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \ \text{ sonst}$$

erhalten wir[1]

$$R^1_{212} = -R^1_{221} = -\frac{r_s}{2r} \ , \ R^1_{313} = -R^1_{331} = -\frac{r_s}{2r}\sin^2\vartheta \ , \ R^1_{414} = -R^1_{441} = \frac{r_s}{r^4}(r_s - r)$$

$$R^2_{442} = -R^2_{424} = \frac{r_s}{2r^4}(r_s - r) \ , \ R^2_{112} = -R^2_{121} = \frac{r_s}{2r^2}\frac{1}{(r-r_s)} \ , \ R^2_{323} = -R^2_{332} = \frac{r_s}{r}\sin^2\vartheta$$

$$R^3_{443} = -R^3_{434} = \frac{r_s}{2r^4}(r_s - r) \ , \ R^3_{113} = -R^3_{131} = \frac{r_s}{2r^2(r-r_s)} \ , \ R^3_{223} = -R^3_{232} = -\frac{r_s}{r}$$

$$R^4_{141} = -R^4_{114} = \frac{r_s}{r^2(r-r_s)} \ , \ R^4_{242} = -R^4_{224} = -\frac{r_s}{2r} \ , \ R^4_{343} = -R^4_{334} = -\frac{r_s}{2r}\sin^2\vartheta$$

$$R^r_{ijk} = 0 \ \text{ sonst}$$

Der kovariante Krümmungstensor

Mit

$$R_{rijk} = g_{rs} R^s_{ijk}$$

[1] Hierbei wurde der Antisymmetrie $R^s_{ijk} = -R^s_{ikj}$ gebrauch gemacht.

und

$$g = \frac{r}{(r-r_s)}\; dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 + \frac{(r_s - r)}{r} \cdot d(ct)^2$$

ergibt sich[2]

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121} = \frac{r_s}{2(r_s - r)}$$

$$R_{1414} = -R_{1441} = -R_{4114} = R_{4141} = -\frac{r_s}{r^3}$$

$$R_{2442} = -R_{2424} = -R_{4242} = R_{4224} = \frac{r_s}{2r^2}(r_s - r)$$

$$R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} = r r_s \sin^2\vartheta$$

$$R_{3443} = -R_{3434} = -R_{4343} = R_{4334} = \frac{r_s}{2r^2}(r_s - r)\sin^2\vartheta$$

$$R_{3113} = -R_{3131} = -R_{1313} = R_{1331} = \frac{r_s}{2}\frac{\sin^2\vartheta}{(r-r_s)}$$

$$R_{rijk} = 0 \quad \text{sonst}$$

Die Kontraktion $R_{abcd}R^{abcd}$

Mit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{r-r_s}{r} & & & \\ & \frac{1}{r^2} & & \\ & & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} & \\ & & & \frac{r}{r_s - r} \end{pmatrix}$$

ergibt sich schließlich

$$R_{abcd}R^{abcd} = R_{abcd}R_{rijk}\underbrace{g^{ra}}_{\delta^{ra}g^{aa}} g^{ib}g^{jc}g^{kd} = \sum_{a,b,c,d} (R_{abcd})^2\, g^{aa}g^{bb}g^{cc}g^{dd} = 12 \cdot \frac{r_s^2}{r^6}$$

Aufgabe 20

Betrachten die kugelsymmetrische Metrik g auf der Raumzeit M. Letztere sei ausgestattet mit den Kugelkoordinaten $(r, \vartheta, \varphi, t)$. Angesichts der geforderten Symmetrien, sollte die Metrik für beliebige Vektoren $X \in TM$ insbesondere bzgl. *Umkehrung* der ∂_φ bzw. ∂_ϑ Komponenten invariant bleiben, das heißt insbesondere

$$\underbrace{g(\partial_t + \partial_\varphi, \partial_t + \partial_\varphi)}_{g_{tt}+g_{\varphi\varphi}+2g_{t\varphi}} \overset{!}{=} \underbrace{g(\partial_t - \partial_\varphi, \partial_t - \partial_\varphi)}_{g_{tt}+g_{\varphi\varphi}-2g_{t\varphi}} \quad \Rightarrow \quad g_{t\varphi} = 0$$

$$\underbrace{g(\partial_t + \partial_\vartheta, \partial_t + \partial_\vartheta)}_{g_{tt}+g_{\vartheta\vartheta}+2g_{t\vartheta}} \overset{!}{=} \underbrace{g(\partial_t - \partial_\vartheta, \partial_t - \partial_\vartheta)}_{g_{tt}+g_{\vartheta\vartheta}-2g_{t\vartheta}} \quad \Rightarrow \quad g_{t\vartheta} = 0$$

Aus analogen Rechnungen folgt ferner

$$g_{r\varphi} = g_{r\vartheta} = 0$$

[2] Unter Ausnutzung der Symmetrie $R_{rijk} = R_{jkri}$ bzw. Antisymmetrien $R_{rijk} = -R_{irjk} = -R_{rikj}$