Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

7. Februar 2009

Aufgabe 17

Nennen

$$v(\tau) := u(\tau) + \chi(\tau)$$

Schreiben

$$\frac{D^2\chi^a}{D\tau^2} = \frac{D}{D\tau}\left[u^b\nabla_b\chi^a\right] = u^c\nabla_c[\underbrace{u^b\partial_b\chi^a}_{\dot\chi^a} + u^b\Gamma^a_{bm}\chi^m] = u^c\partial_c\left[\dot\chi^a + u^b\Gamma^a_{bm}\chi^m\right] + u^c\Gamma^a_{cn}\left[\dot\chi^n + u^b\Gamma^n_{bm}\chi^m\right]$$

$$= \underbrace{u^c\partial_c\dot\chi^a}_{\ddot\chi^a} + u^b\Gamma^a_{bm}\underbrace{u^c\partial_c\chi^m}_{\dot\chi^m} + u^cu^b\chi^m\partial_c\Gamma^a_{bm} + \Gamma^a_{bm}\chi^m\underbrace{u^c\partial_c u^b}_{\dot u^b} + u^c\Gamma^a_{ci}\left[\dot\chi^i + u^b\Gamma^i_{bm}\chi^m\right]$$

$$= \ddot\chi^a + \underbrace{\dot u^b}_{-\Gamma^b_{ij}u^iu^j}\Gamma^a_{bm}\chi^m + 2u^b\Gamma^a_{bm}\dot\chi^m + u^bu^c\chi^m\left[\partial_c\Gamma^a_{bm} + \Gamma^a_{ci}\Gamma^i_{bm}\right]$$

$$= \ddot\chi^a + 2u^b\Gamma^a_{bm}\dot\chi^m + u^bu^c\chi^m\left[\partial_c\Gamma^a_{bm} - \Gamma^i_{bc}\Gamma^a_{im} + \Gamma^a_{ci}\Gamma^i_{bm}\right]$$

Für genügend kleine Abweichungen χ^a kann man lokal die Eigenzeit der beiden Teilchen gleichsetzen (*), so dass gilt

$$\ddot\chi^a = \ddot v^a - \ddot u^a \overset{(*)}{\approx} \Gamma^a_{ij}\big|_{u(\tau)}u^iu^j - \Gamma^a_{ij}\big|_{v(\tau)}v^iv^j \approx \underbrace{\Gamma^a_{ij}\big|_{u(\tau)}}_{=:\Gamma^a_{ij}}u^iu^j - v^iv^j\left[\chi^m\partial_m\Gamma^a_{ij}\big|_{u(\tau)} + \Gamma^a_{ij}\big|_{u(\tau)}\right]$$

$$= \Gamma^a_{ij}\left[u^iu^j - v^iv^j\right] - v^iv^j\chi^m\partial_m\Gamma^a_{ij} = \Gamma^a_{ij}\left[u^i\dot\chi^j + u^j\dot\chi^i + \dot\chi^i\dot\chi^j\right] - \left[u^iu^j + u^i\dot\chi^j + u^j\dot\chi^i + \dot\chi^i\dot\chi^j\right]\chi^m\partial_m\Gamma^a_{ij}$$

$$= \Gamma^a_{ij}\left[2u^i\dot\chi^j + \dot\chi^i\dot\chi^j\right] - \left[u^iu^j + 2u^j\dot\chi^i + \dot\chi^i\dot\chi^j\right]\chi^m\partial_m\Gamma^a_{ij}$$

Unter Vernachlässigung quadratischer und kubischer Terme in χ^i bzw. $\dot\chi^i$ folgt

$$\ddot\chi^a \approx 2u^i\dot\chi^i\Gamma^a_{ij} - u^iu^j\chi^m\partial_m\Gamma^a_{ij}$$

und somit

$$\frac{D^2\chi^a}{D\tau^2} = u^bu^c\chi^m\underbrace{\left[\partial_c\Gamma^a_{bm} - \partial_m\Gamma^a_{bc} + \Gamma^i_{bm}\Gamma^a_{ci} - \Gamma^i_{bc}\Gamma^a_{im}\right]}_{R^a_{bcm}}$$

□

Aufgabe 18

Betrachten nun den Fall geringer Geschwindigkeiten u, und einer Metrik

$$g_{ik} = \eta_{ik} + f_{ik}$$

mit $|f_{ik}| \ll 1$. Dementsprechend:

1. Vernachlässigen wir in folgenden Betrachtungen jegliche quadratische Terme in Γ^k_{ij} und f_{ik}.
2. Betrachten wir Ableitungen nach ∂_4 gegenüber anderen Ableitungen als unwesentlich (nur schwache zeitliche Veränderungen).
3. Betrachten wir die Geschwindigkeit $u^4 \approx c$ als dominant.
4. Nähern Eigenzeiten τ durch Zeiten t.

Schreiben somit

$$\frac{D^2\chi^a}{D\tau^2} = R^a_{bcm} u^b u^c \chi^m \overset{(3)}{\approx} R^a_{44m} c^2 \chi^m$$

Mit

$$R^a_{bcm} = \partial_c \Gamma^a_{bm} - \partial_m \Gamma^a_{bc} + \Gamma^i_{bm}\Gamma^a_{ci} - \Gamma^i_{bc}\Gamma^a_{im} \overset{(1)}{\approx} \partial_c \Gamma^a_{bm} - \partial_m \Gamma^a_{bc}$$

und speziell

$$R^a_{44m} = \partial_4 \Gamma^a_{4m} - \partial_m \Gamma^a_{bc} \overset{(2)}{\approx} -\partial_m \Gamma^a_{44}$$

folgt

$$\frac{D^2\chi^a}{D\tau^2} \approx -c^2 \chi^m \partial_m \Gamma^a_{44}$$

Betrachten wir die Geodätengleichung für ein, sich langsam bewegendes ($\tau \approx t$), freies Teilchen

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = -\Gamma^a_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \overset{(3)}{\approx} -\Gamma^a_{44}c^2$$

so folgt unter Vergleich mit den klassischen Erwartungen

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} \overset{(4)}{\approx} \frac{d^2x^a}{dt^2} = -\eta^{ia}\partial_i U \tag{1}$$

mit dem Gravitationspotential U, die Beziehung

$$c^2\Gamma^a_{44} \approx \eta^{ia}\partial_i U$$

und somit die DGL

$$\frac{d^2\chi^a}{dt^2} \overset{(4)}{\approx} \frac{D^2\chi^a}{D\tau^2} \approx -\eta^{ia}\chi^m \partial_{mi} U$$

das heißt

$$\boxed{\frac{d}{dt^2}(x^a + \chi^a) \approx -\eta^{ia}\left[1 + \chi^m \partial_m\right]\frac{\partial U}{\partial x^i}}$$

Aufgelöst bedeutet dies

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^a + \chi^a) \approx -\left[1 + \chi^m \partial_m\right]\frac{\partial U}{\partial x^a} \quad , \quad a = 1,2,3$$

was genau den Erwartungen entspricht (Taylor-Polynom 1. Ordnung)![1]

[1] Bemerke: Der Übergang zur klassischen Mechanik wurde mit Gl. 1 vollzogen. Dieser Schritt verbindet den Startpunkt (Geodätengleichungen) mit dem Endpunkt (Newtonsches Gravitationspotential). Das Ergebnis stellt so eigentlich eine Tautologie dar!