Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Dezember 2008

Aufgabe 11

Beginnend mit der Koordinatentransformation

$$(r, \vartheta, \varphi, ct) = \left(r, \vartheta, \varphi,\ v - r - R \ln \left| \frac{r}{R} - 1 \right| \right)$$

schreiben wir

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - R/r} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) - (1 - R/r)\ d(ct)^2$$

$$= \frac{dr^2}{1 - R/r} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) - (1 - R/r) \left[\frac{\partial(ct)}{\partial r} dr + \frac{\partial(ct)}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial(ct)}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial(ct)}{\partial v} dv\right]^2$$

$$= \frac{dr^2}{1 - R/r} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) - (1 - R/r) \left[\frac{r}{R - r} dr + dv\right]^2$$

$$= \frac{r}{r - R} dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) + \frac{R - r}{r} \left[\frac{r^2}{(R - r)^2} dr^2 + \frac{r}{R - r} dr \otimes dv + \frac{r}{R - r} dv \otimes dr + dv^2\right]$$

$$= r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) + dr \otimes dv + dv \otimes dr + \frac{R - r}{r} dv^2$$

das heißt die entsprechende Koeffizientenmatrix ist gegeben durch

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{R}{r} - 1 \end{pmatrix}$$

Deren inverse ergibt gemäß

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R}{r} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma über Koordinatentransformationen

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, lokal ausgestattet mit der Karte ψ in den Koordinaten x^i, dazu fester Punkt $p \in M$. Es sei $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus auf $\mathbb{R}^n$ (z.B. lineare Koordinatentransformation). Betrachten die durch $\mathcal{T}$

induzierten Basis-Vektoren in T_pM:

$$a_i := \left[\mathcal{T}^{-1}(e_i)\right]^j \partial_{x^j} = \underbrace{(\mathcal{T}^{-1})^j_i}_{\substack{\text{bzgl.}\\ \text{standard}\\ \text{Basis in } \mathbb{R}^n}} \partial_{x^j} \in T_pM$$

das heißt für Vektoren/Vektorfelder $v = \tilde{v}^i a_i = v^i \partial_{x^i}$ gilt $\tilde{v}^i = \mathcal{T}^i_j v^j$ ($\mathcal{T}$ beschreibt Koordinatenänderung von Tangentenvektoren in T_pM) und die durch die Karte $\mathcal{T} \circ \psi$ induzierten Koordinaten $\tilde{x}^i$. Dann gilt für die Koordinaten $\tilde{x}^i$ in der Karte $\mathcal{T} \circ \psi$:

$$d\tilde{x}^i = T^i_j dx^j = a^*_i$$

Beweis:

$$d\tilde{x}^i(a_j) = T^i_k dx^k(a_j) = T^i_k dx^k \left((T^{-1})^l_j \partial_{x^l}\right) = T^i_k (T^{-1})^l_j \delta^k_l = T^i_k (T^{-1})^k_j = (TT^{-1})^i_j = \delta^i_j$$

□

Aufgabe 12

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ausgestattet mit dem metrischen Tensor g und der Karte ψ in den Koordinaten x^i, dazu ein fester Punkt $p \in M$ mit Koordinaten x^i_p. Dabei besitze g die Darstellung

$$g_{ij} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Koordinatentransformation zur Eliminierung der 1. Ableitungen

Vorbetrachtung

Definieren die skalaren Felder[1]

$$\Gamma^l_{ij} := \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] \cdot g^{kl} \tag{1}$$

auf M. Zu erkennen ist: Aufgrund der Symmetrie von g sind diese ebenfalls symmetrisch bzgl. der i, j:

$$\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$$

Führen nun die neuen Koordinaten $\tilde{x}^i$ ein, für die gilt

$$x^l(\tilde{x}) =: x^l_p + \tilde{x}^l - \frac{1}{2}\Gamma^l_{ij}\big|_p \cdot \tilde{x}^i \tilde{x}^j \tag{2}$$

Dann ist

$$\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^r} = \delta^l_r - \frac{1}{2}\Gamma^l_{ij}\big|_p \left(\delta^i_r \tilde{x}^j + \tilde{x}^i \delta^j_r\right) = \delta^l_r - \frac{1}{2}\left[\Gamma^l_{rj}\big|_p \tilde{x}^j + \underbrace{\Gamma^l_{ir}\big|_p}_{\Gamma^l_{ri}|_p} \tilde{x}^i\right] = \delta^l_r - \Gamma^l_{rj}\big|_p \tilde{x}^j \tag{3}$$

Behauptung: Die durch Def. (2) definierte Abbildung $\tilde{x} \mapsto x$ ist in einer Umgebung U von p tatsächlich eine Koordinatentransformation, das heißt insbesondere ein Diffeomorphismus.
Beweis: Wegen

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)\Bigg|_{\tilde{x}=0} = \det\left(\delta^j_i\right) = 1 \neq 0$$

ist $\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\right)\Big|_{\tilde{x}=0}$ umkehrbar. Nach dem Umkehrsatz der Analysis (bzw. Satz über implizite Funktionen) existieren somit Umgebungen U und $\tilde{U}$ jeweils um $x(\tilde{x} = 0)$ und $\tilde{x} = 0$ so dass $\tilde{x} : \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Wegen $x(\tilde{x} = 0) = x_p$ ist $p \in U$.

[1] Diese sind die so genannten Christoffel-Symbole. In diesem Kontext werden jedoch keinerlei Eigenschaften bzw. Interpretation dieser benötigt. Es sei gesagt, dass Geodäten auf M das Differentialgleichungssystem $\ddot{u}^l = -\Gamma^l_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$ erfüllen.

Komponenten von g in den neuen Koordinaten

Die Komponenten von g sind somit in diesen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{rs} = g_{l\lambda}\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^r}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^s} &\overset{(3)}{=} g_{l\lambda}\left[\delta^l_r - \Gamma^l_{rj}\big|_p\tilde{x}^j\right]\cdot\left[\delta^\lambda_s - \Gamma^\lambda_{si}\big|_p\tilde{x}^i\right] \\ &= g_{rs} + g_{l\lambda}\Gamma^l_{rj}\big|_p\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\tilde{x}^j\tilde{x}^i - g_{ls}\Gamma^l_{rj}\big|_p\tilde{x}^j - g_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\tilde{x}^i \end{aligned} \tag{4}$$

und stellen lediglich skalare Felder auf M dar.

Berechnung der Ableitungen

Beginnend mit Ausdruck (4) schreiben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{g}_{rs}}{\partial\tilde{x}^\nu} \overset{(4)}{=} &\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu} + \frac{\partial g_{l\lambda}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^l_{rj}\big|_p\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\tilde{x}^j\tilde{x}^i + g_{l\lambda}\Gamma^l_{rj}\big|_p\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\left(\delta^j_\nu\tilde{x}^i + \delta^i_\nu\tilde{x}^j\right) \\ &- \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^l_{rj}\big|_p\tilde{x}^j - g_{ls}\Gamma^l_{rj}\big|_p\delta^j_\nu - \frac{\partial g_{r\lambda}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\tilde{x}^i - g_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{si}\big|_p\delta^i_\nu\end{aligned}$$

Speziell im *Ursprung* p sind $\tilde{x}^i = 0$, das heißt

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\tilde{g}_{rs}}{\partial\tilde{x}^\nu}\right|_p &= \left.\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\right|_p - g_{ls}\big|_p\Gamma^l_{r\nu}\big|_p - g_{r\lambda}\big|_p\Gamma^\lambda_{s\nu}\big|_p \\ &= \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^\mu}\delta^\mu_\nu - \frac{1}{2}\underbrace{g_{ls}\big|_p\cdot g^{kl}\big|_p}_{\delta^k_s}\cdot\left[\frac{\partial g_{\nu k}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{r\nu}}{\partial x^k}\right] - \frac{1}{2}\underbrace{g_{r\lambda}\big|_p\cdot g^{k\lambda}\big|_p}_{\delta^k_r}\cdot\left[\frac{\partial g_{\nu k}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{s\nu}}{\partial x^k}\right] \\ &= \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\nu s}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{r\nu}}{\partial x^s}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\nu r}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{s\nu}}{\partial x^r}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Diagonalisierung

Da g (als Bilinearform auf $T_P M$) schiefsymmetrisch ist, existiert in $T_p M$ eine Basis $b_1, .., b_n \in T_p M$ so dass für die Darstellung

$$g = \tilde{g}_{ij} b^{i*} \otimes b^{j*} \text{ (lokal)}$$

die Koeffizientenmatrix $(\tilde{g}_{ij})$ Diagonal ist (vgl. lineare Algebra). Sei $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dazu die entsprechende Koordinatentransformation, das heißt für

$$v = \tilde{v}^i b_i = v^i \partial_{x^i}$$

gilt $\tilde{v}^i = T^i_j v^i$. Für die zur Karte $\mathcal{T} \circ \psi$ gehörigen Koordinaten $\tilde{x}^i$ gilt dann (in $p \in M$) nach Lemma 01:

$$b^*_i = d\tilde{x}^i$$

das heißt

$$g = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i \otimes d\tilde{x}^j$$

Alternative

Gesucht ist eine Koordinatentransformation $x \overset{T}{\mapsto} \tilde{x}$ so dass

$$\tilde{g}_{kl} := g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l}$$

im Punkt $p \in M$ diagonalform annimmt. Insbesondere für festes k, l im Punkt p muss also gelten:

$$\tilde{g}_{kl}\big|_p = \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^k} \right)^T}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{(g_{ij})\big|_p}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^l} \right)}_{\in \mathbb{R}^n} = \lambda_k \delta_{kl}$$

für irgendwelche λ_k. Doch nach dem Spektralsatz über selbstadjungierte Endomorphismen existiert eine Orthonormalbasis

$$\{b_r\}_{r=1}^n \subset \mathbb{R}^n$$

aus Eigenvektoren (bzgl. des im $\mathbb{R}^n$ existierenden Skalarproduktes) von $(g_{ij})\big|_p$ in $\mathbb{R}^n$ (da $(g_{ij})\big|_p$ symmetrisch), das heißt

$$b_k^T \cdot \underbrace{(g_{ij})\big|_p \cdot b_l}_{\lambda_l b_l} = \lambda_l \underbrace{b_k^T \cdot b_l}_{\delta_{kl}} = \lambda_l \delta_{kl}$$

Definieren wir die (orthogonale) Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ indem wir deren Spalten mit den b_r identifizieren, so ist der dadurch induzierte Endomorphismus $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genau solch eine gesuchte Basistransformation[2], denn dann wäre genau

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}^r} \right) = b_r$$

Bemerkung: Verschwinden die ersten Ableitungen der Komponenten $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}$ in einer bestimmten Karte (vgl. Teil (a)), so ändert die hier vorgeführte Diagonalisierung nichts an der Tatsache, denn in den neuen Koordinaten $\tilde{x}$ wäre dann

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{x}^l} = \frac{\partial}{\tilde{x}^l} \Bigg(g_{rs} \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i}}_{T_i^r} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^j}}_{T_j^s} \Bigg) = T_i^r T_j^s \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^l} \underbrace{\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}}_{0} = 0$$

Umgekehrt, ist (g_{ij}) ursprünglich in Diagonalform, so bleibt nach der Koordinatentransformation aus Teil (a) trotzdem $(\tilde{g}_{rs})$ in p diagonal:

$$\tilde{g}_{rs}\big|_p \overset{(4)}{=} g_{rs}$$

$\square$

[2] Hier gilt sogar $T^{-1} = T^T$