# Relativistische Physik

## FSU Jena - WS 2008/2009

## Übungsserie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Februar 2009

---

**Konventionen**

- Nennen $x^1, x^2, x^3, x^4$ die Koordinaten im jeweils betrachteten Koordinatensystem. Dabei ist $x^4 = ct$.
- Verwenden bzgl. diesen Koordinaten die Metrik

$$(\eta_{ij}) = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$$

## Aufgabe 01

Beginnend mit $\partial_n T^{mn} = f^m$ und

$$T^{mn} = \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) u^m u^n + p\eta^{mn} \tag{1}$$

schreiben wir

$$-\frac{f^m}{c^2}u_m = -\frac{1}{c^2}\eta_{km}u^k\partial_n T^{mn}$$

$$\overset{(1)}{=} -\frac{1}{c^2}\underbrace{\eta_{km}u^k u^m}_{-c^2} u^n\partial_n\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\eta_{km}u^k \underbrace{u^n\partial_n u^m}_{\partial_\tau u^m} - \frac{1}{c^2}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\underbrace{\eta_{km}u^m u^k}_{-c^2}\partial_n u^n - \frac{1}{c^2}\underbrace{\eta_{km}\eta^{mn}}_{\delta_k^n}u^k\partial_n p$$

$$= u^n\partial_n\left(\mu + \cancel{\frac{p}{c^2}}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\underbrace{\eta_{km}u^k\dot{u}^m}_{0} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\partial_n u^n - \cancel{\frac{1}{c^2}u^n\partial_n p} = \dot{\mu} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\partial_n u^n \tag{2}$$

und analog

$$h^{im}f_m = \eta^{im}f_m + \frac{1}{c^2}u^i u^m f_m = \underbrace{\eta^{im}\eta_{ml}}_{\delta_l^i}f^l + \frac{1}{c^2}u^i\underbrace{u^m\eta_{ml}}_{u_l}f^l \overset{(2)}{=} \underbrace{f^i}_{\partial_n T^{in}} - u^i\left[\dot{\mu} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\partial_n u^n\right]$$

$$\overset{(1)}{=} u^i\underbrace{u^n\partial_n}_{\partial_\tau}\left(\cancel{\mu} + \frac{p}{c^2}\right) + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\underbrace{u^n\partial_n u^i}_{\dot{u}^i} + \cancel{u^i\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\partial_n u^n} + \eta^{in}\partial_n p - u^i\left[\cancel{\dot{\mu}} + \cancel{\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\partial_n u^n}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c^2}u^i u^n\partial_n p + \eta^{in}\partial_n p}_{h^{in}\partial_n p} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\dot{u}^i \tag{3}$$

## Aufgabe 02

a) Mit $p = 0,\ f = 0$ vereinfacht sich Gleichung (3) zu

$$\mu \dot{u}^i = 0$$

was genau einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung in der Raumzeit entspricht. Dies war auch zu erwarten, da ohne äußere Kräfte bzw. Wechselwirkung (Druck $P$) die Vierergeschwindigkeit $u$ : const bzw. die Geschwindigkeit $\vec{v}$ : const bleiben. Analog wird aus Gleichung (2)

$$0 = \dot{\mu} + \mu \partial_n u^n = u^n \partial_n \mu + \mu \partial_n u^n = \partial_n \left(\mu u^n\right) = \operatorname{div}_3 \left(\mu u\right) + \underbrace{\partial_4 \frac{e}{c}}_{\frac{1}{c^2}\partial_t e} = \operatorname{div}_3(\mu_r \vec{v}) + \frac{1}{c^2}\partial_t e$$

mit der Energiedichte $e$ und der relativistischen Masse $\mu_r$ was genau der Energie (bzw. Massen) erhaltung entspricht.

b) Analog zu (a) vereinfacht sich Gleichung (2) zu

$$\operatorname{div}_3(\mu u) + \frac{1}{c^2}\partial_t e = -\frac{1}{c^2} f^m u_m = -\frac{\rho_{\mathrm{el}}}{c^2} F^{mn} u_n u_m$$

was einer Energie-Bilanzgleichung entspricht. Die Massenerhaltung ist also nicht mehr erfüllt, da nun elektromagnetische Energie hinzukommt. Gleichung (3) ergibt

$$\mu \dot{u}^i = \eta^{im} f_m + \frac{1}{c^2} u^i u^m \underbrace{f_m}_{\eta_{lm} f^l} = f^i + \frac{\rho_{\mathrm{el}}}{c^2} \underbrace{\eta_{lm} F^{ln}}_{F^n_m} u_n u^i u^m = f^i + \frac{\rho_{\mathrm{el}}}{c^2} u^i \underbrace{u_n F^n_m u^m}_{\substack{F(u,u)=0 \\ \text{da } F \\ \text{Alternierend}}} = f^i$$

Interpretiert man $\mu u$ als die lokale Impulsdichte der sich mit der Geschwindigkeit $u$ bewegenden Flüssigkeit, so entspricht dies dem bekannten (relativistischen) Newtonschen *Axiom*. Insbesondere ist $f^i$ genau die Lorentz-Kraftdichte auf die Teilchen.