Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Februar 2009

Konventionen

- Nennen x^1, x^2, x^3, x^4 die Koordinaten im jeweils betrachteten Koordinatensystem. Dabei ist $x^4 = ct$.
- Verwenden bzgl. diesen Koordinaten die Metrik
$$(\eta_{ij}) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$$
- Nennen $d\tau$ definiert durch
$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j =: -c^2 d\tau^2$$
die Eigenzeit.
- Nennen
$$u^i := \frac{dx^i}{d\tau}$$

Aufgabe 01

Beginnend mit dem Feldstärketensor

$$(F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & -E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & -E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & -E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_{x^3}, \underbrace{\partial_{x^4}}_{\partial_{ct}}$ und dem Anfangswertproblem

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{cm_0} F^{ij} \underbrace{u_j}_{\eta_{jk}u^k}, \ u(\tau = 0) = (0, 0, 0, c)$$

$$\text{Speziell:} \quad \frac{du}{d\tau} = \underbrace{\frac{qE^1}{cm_0}}_{\omega} \begin{pmatrix} u^4 \\ 0 \\ 0 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$\frac{d^2u^1}{d\tau^2} = \omega \frac{du^4}{d\tau} = \omega^2 u^1$$

und erhalten die allgemeine Lösung

$$u^1(\tau) = A\cosh(\omega\tau) + B\sinh(\omega\tau) \tag{1}$$
$$u^2 = u^3 = \mathrm{const} \tag{2}$$
$$u^4(\tau) = \frac{1}{\omega}\frac{du^1}{d\tau} = A\sinh(\omega\tau) + B\cosh(\omega\tau) \tag{3}$$

Durch den Anfangswert $u(0) = (0,0,0,c)$ ergibt sich

$$\boxed{u(\tau) = c \begin{pmatrix} \sinh(\omega\tau) \\ 0 \\ 0 \\ \cosh(\omega\tau) \end{pmatrix} \ , \ \omega = \frac{qE^1}{cm_0}} \tag{4}$$

Integration liefern mit $x(\tau = 0) = 0$ schließlich die (durch τ parametrisierte) Weltlinie

$$\boxed{x(\tau) = \frac{c}{\omega} \begin{pmatrix} \cosh(\omega\tau) - 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sinh(\omega\tau) \end{pmatrix}} \tag{5}$$

Bemerke: Für $\tau \to \infty$ (und somit $t \to \infty$) geht

$$\frac{dx^1}{dx^4} = \frac{u^1}{u^4} \overset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

das heißt die Geschwindigkeit des Teilchens nähert sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit!

Aufgabe 02

a) Es seien p_{e0}, p_{p0} und p_e, p_p jeweils die Impulse von Elektron und Photon vor und nach dem Stoß. Analog seien λ_0 und λ die Wellenlänge des Photons vor und nach dem Stoß. Es sei o.B.d.A

$$p_{e0} = (0,0,0,m_0 c) \ , \ p_{p0} \overset{\frac{p_{p0}}{c} = \frac{hc}{\lambda_0}}{=} \frac{h}{\lambda_0}(1,0,0,1)$$

(Photon-Bewegung in x^1-Richtung & ruhendes Elektron) und

$$p_e = \left(q_e \cos\varphi, q_e \sin\varphi, 0, \sqrt{m_0^2 c^2 + q_e^2}\right) \ , \ p_p = \frac{h}{\lambda}(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0, 1)$$

für geeignete q_e, φ (Stoß in der $x^1 x^2$-Ebene). Durch die Impulserhaltung

$$p_{e0} + p_{p0} = p_e + p_p \tag{6}$$

folgt dann

$$q_e^2 = (p_e^1)^2 + (p_e^2)^2 = \left(p_{e0}^1 + p_{p0}^1 - p_p^1\right)^2 + \left(p_{e0}^2 + p_{p0}^2 - p_p^2\right)^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{\cos\vartheta}{\lambda_0\lambda}\right) \tag{7}$$

und

$$q_e^2 = (p_e^4)^2 - m_0^2c^2 = \left(p_{e0}^4 + p_{p0}^4 - p_p^4\right)^2 - m_0^2c^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda_0\lambda}\right) + 2hm_0c\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) \tag{8}$$

was zusammengefasst impliziert

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{cm_0}(1 - \cos\vartheta)} \tag{9}$$

b) Es sei o.B.d.A

$$p_{e0} = \left(q_{e0}, 0, 0, \sqrt{m_0^2c^2 + q_{e0}^2}\right) \ , \ p_{p0} = \frac{h}{\lambda_0}(1,0,0,1)$$

für geeignetes q_{e0} so dass $p_{e0}^i + p_{p0}^i = 0, \ i = 1,2,3$, das heißt

$$q_{e0} = -\frac{h}{\lambda_0}$$

Sei analog zu vorhin

$$p_e = \left(q_e \cos\varphi, q_e \sin\varphi, 0, \sqrt{m_0^2 c^2 + q_e^2} \right) \;,\; p_p = \frac{h}{\lambda} \left(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0, 1 \right)$$

für geeignete q_e, φ (Stoß in $x^1 x^2$-Ebene). Durch Gleichung 6 folgt

$$q_e^2 = (p_e^1)^2 + (p_e^2)^2 = (p_p^1)^2 + (p_p^2)^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} \tag{10}$$

und

$$q_e^2 = (p_e^4)^2 - m_0^2 c^2 = \left(p_{e0}^4 + p_{p0}^4 - p_p^4 \right)^2 - m_0^2 c^2 = h^2 \left(\frac{2}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda_0 \lambda} \right) + 2h \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{\lambda_0^2}} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) \tag{11}$$

das heißt zusammengefasst

$$(\lambda - \lambda_0) \cdot \underbrace{\left[h + \lambda_0 \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{\lambda_0^2}} \right]}_{\neq 0} = 0 \tag{12}$$

und somit

$$\boxed{\lambda = \lambda_0} \tag{13}$$

Anschauliche Interpretation: Das auf das Elektron auftreffende Photon behält seine Wellenlänge (und somit Impuls und Energie) und wird lediglich in in eine andere Richtung gestreut. Dementsprechend wird das Elektron in die entgegengesetzte Richtung gestreut und behält dabei ebenfalls seinen Impuls bzw. Energie. Dabei ist der Streuungswinkel unvorhersehbar bzw. unwesentlich.

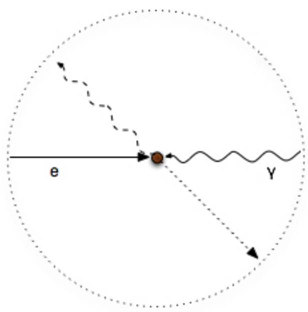

Abbildung 1: Zur Photonenstreuung im Ruhesystem