# Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Februar 2009

---

## Aufgabe 01

Das Inertialsystem $\Sigma'$ bewege sich o.B.d.A mit $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entlang der $x$-Achse von $\Sigma$ und die Stab-Enden befinden sich in $\Sigma'$ bei $x = 0$ und $x = 2L$. Beginnend mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma = \sqrt{1 - v^2}$$

zwischen den Koordinaten in den beiden Inertialsystemen, betrachten wir die *Weltlinie* (bzw. *Ereignismenge*) die die beiden Rohr-Enden durchlaufen. In $\Sigma$ seien diese gegeben durch die Koordinaten $l = (0, t)$ und $r = (L, t), \ t \in \mathbb{R}$ und somit

$$l' = \begin{pmatrix} x'_l \\ t'_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -vt \\ t \end{pmatrix} \ , \ r' = \begin{pmatrix} x'_r \\ t'_r \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} L - vt \\ -vL + t \end{pmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

Schließen nun die beiden Enden des Rohres in $\Sigma$ o.B.d.A zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so entspricht dies 2 Ereignissen in der Raumzeit, gegeben durch die Koordinaten

$$\Sigma : l_0 = (0, 0) \ , \ r_0 = (L, 0)$$

(vgl. Abbildung 1) und

$$\Sigma' : l'_0 = (0, 0) \ , \ r'_0 = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} L \\ -vL \end{pmatrix} \overset{\gamma = \frac{1}{2}}{=} \begin{pmatrix} 2L \\ -2vL \end{pmatrix}$$

Dies bedeutet dass in $\Sigma'$ die beiden Rohrenden <u>nicht</u> gleichzeitig geschlossen werden. Nämlich wird zuerst das rechte Ende (bei $x' = 2L$) zum Zeitpunkt $-\sqrt{3}L$ geschlossen, während das linke Ende des Rohres sich noch bei $x'_l(t'_l = t'_r(t = t_0)) = \frac{3}{2}L$ befindet. Zum *späteren* Zeitpunkt $t' = 0$ wird dann in $\Sigma'$ auch das linke Ende (bei $x' = 0$) geschlossen, wobei sich nun das rechte Ende schon bei $x'_r(t'_r = t'_l(t = t_0)) = \frac{L}{2}$ befindet (vgl. Abbildung 2).

**Bemerke:**

- Im System $\Sigma$ kann natürlich das Rohr geschlossen werden, und der Stab befindet sich *momentan* auch *im* Rohr. Unter Annahme dass es sich stets um Inertialsysteme (inclusive Stab) handeln soll, wird natürlich der Stab trotz dem durch das Rohr gehen.
- Zwei Ereignisse die in $\Sigma$ gleichzeitig stattfinden, finden in $\Sigma'$ zeitversetzt statt!

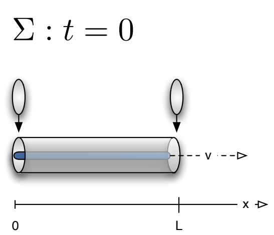


**Abbildung 1:** Ereignisse in $\Sigma$: Der Stab ist momentan gefangen

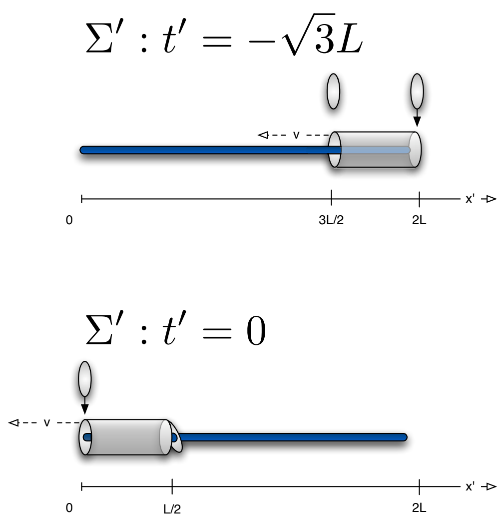


**Abbildung 2:** Ereignisse in $\Sigma'$: Der Stab bricht ungestört durch das Rohr

## Aufgabe 02

Nennen für Vektoren $x, y$:

$$(x)_3 := \sum_{i=1}^{3} x^i e_i \ , \ \langle x, y\rangle_3 := \sum_{i=1}^{3} x^i y^i \ , \ \|x\|_3 := \sqrt{\langle x, x\rangle_3}$$

Somit ist insbesondere $\eta(x, y) = \langle x, y\rangle_3 - x^4 y^4$.

a) Für zwei zeitartige Vektoren $x_1, x_2$, das heißt $\eta(x_i, x_i) < 0$ ist

$$\eta(x_1 + x_2, x_1 + x_2) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\eta(x_1, x_1)}_{<0} + \underbrace{\eta(x_1, x_2) + \eta(x_2, x_1)}_{\substack{<0 \\ \text{nach (c)}}} + \underbrace{\eta(x_2, x_2)}_{<0} < 0$$

Wegen

$$(x_1 + x_2)^4 = \underbrace{x_1^4}_{>0} + \underbrace{x_2^4}_{>0} > 0$$

ist somit $x_1 + x_2$ zeitartig, zukunftsreißend.

b) Es sei $x$ zeitartig und $\eta(x, y) = 0$ mit $y \neq 0$. O.B.d.A sei $y^4 \neq 0$ (sonst wäre $\|y\|_3 \overset{y\neq 0}{>} 0$ und somit $y$ raumartig). Dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|x\|_3 \|y\|_3 \overset{\text{C.S.}}{\geq} |\langle x, y\rangle_3| \overset{\eta(x,y)=0}{=} \left|x^4 y^4\right| \overset{\substack{\eta(x,x)<0 \\ y^4\neq 0}}{>} \|x\|_3 \left|y^4\right| \ \Rightarrow \ \|y\|_3 > \left|y^4\right|$$

und somit $\eta(y, y) = \|y\|_3^2 - \left|y^4\right|^2 > 0$

c) Es seien $x_1, x_2$ zeitartig, zukunftsreißend. Dann folgt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\langle x_1, x_2\rangle_3 \overset{\text{C.S.}}{\leq} \|x_1\|_3 \cdot \|x_2\|_3 \overset{\eta(x_i,x_i)<0}{<} \left|x_1^4 x_2^4\right| \overset{x_i^4>0}{=} x_1^4 x_2^4$$

das heißt

$$\eta(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2\rangle_3 - x_1^4 x_2^4 < 0$$

d) Es seien $x_1, x_2$ lichtartig und $\eta(x_1, x_2) = 0$. Es sei o.B.d.A $x_1^4 \neq 0$ (ansonsten ist $x_1 = 0 \cdot x_2$). Es gilt

$$|\langle x_1, x_2\rangle_3| \overset{\eta(x_1,x_2)=0}{=} \left|x_1^4 x_2^4\right| \overset{\eta(x_i,x_i)=0}{=} \|x_1\|_3 \|x_2\|_3$$

Bekanntlich sind somit $(x_1)_3 \parallel (x_2)_3$ das heißt $(x_2)_3 = \lambda \cdot (x_1)_3$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit

$$0 = \eta(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle_3 - x_1^4 x_2^4 = \lambda \underbrace{\langle x_1, x_1 \rangle_3}_{(x_1^4)^2} - x_1^4 x_2^4 = x_1^4 \left(\lambda x_1^4 - x_2^4\right)$$

folgt wegen $x_1^4 \neq 0$ entsprechend $x_2^4 = \lambda x_1^4$.

□