Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

6. November 2008

Aufgabe 01

Definitionsgemäß ist eine lineare Transformation $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zwischen den Koordinaten (x_1, t_1), (x_2, t_2) zweier Karten der Raumzeit-Mannigfaltigkeit genau dann eine *Lorentz-Transformation* falls für die 2-Formen

$$ds_j^2 := \eta_{kl} dx_j^k \otimes dx_j^l = \sum_{i=1}^{3} dx_j^i \otimes dx_j^i - dt_j \otimes dt_j$$

die Gleichheit für $j = 1, 2$ gilt, wobei

$$(\eta_{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit $x_2^i = L_k^l x_1^k$ folgt dann die äquivalente Bedingung an L:

$$\eta_{mn} = \eta_{ik} L_m^i L_n^k = \left[L^T \eta L\right]_{mn}$$

bzw.

$$\boxed{\eta = L^T \eta L} \tag{1}$$

Es sei $(\mathcal{L}, \circ)$ die Menge aller Lorentz-Transformationen ausgestattet mit der Verkettung $\circ$. Zu zeigen wären die Gruppenaxiome für $(\mathcal{L}, \circ)$:

1. Für zwei Lorentz-Transformationen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ ist auch $L_1 \circ L_2$ eine Lorentz-Transformation, denn

$$(L_1 \circ L_2)^T \eta (L_1 \circ L_2) = \left(L_2^T \circ L_1^T\right) \eta (L_1 \circ L_2) = L_2^T \underbrace{\left(L_1^T \eta L_1\right)}_{\eta} L_2 = L_2^T \eta L_2 = \eta$$

2. **Linksneutrales Element:** $L_0 := \mathrm{Id}$ ist offensichtlich eine Lorentz-Transformation (vgl. Bedingung 1).

3. **Linksinverses Element:** Zu $L \in \mathcal{L}$ existiert stets die inverse L^{-1} denn

$$-1 = \det(\eta) = \det(L^T \eta L) = \det(L^T) \det(\eta) \det(L) = -(\det(L))^2 \;\Leftrightarrow\; \det(L) = \pm 1$$

das heißt L ist eine Bijektion. Wegen

$$\underline{(L^T \eta)\eta} = L^T \underbrace{\eta^2}_{\mathrm{Id}} = L^T \,\mathrm{Id} = \mathrm{Id}\, L^T = \eta^2 L^T = \underbrace{(L^T \eta L)}_{\eta} \eta L^T = \underline{(L^T \eta)(L \eta L^T)}$$

$$\Rightarrow \; \underline{\eta} = (L^T \eta)^{-1} (L^T \eta) \eta = (L^T \eta)^{-1} (L^T \eta)(L \eta L^T) = \underline{L \eta L^T}$$

$$\Rightarrow \; (L^{-1})^T \eta L^{-1} = (L^T)^{-1} \eta L^{-1} = \left[L \eta^{-1} L^T\right]^{-1} \overset{\eta^{-1} = \eta}{=} \left[L \eta L^T\right]^{-1} = \eta^{-1} = \eta$$

ist L^{-1} ebenso eine Lorentz-Transformation.

Bemerke:

- Aus diesem Beweis ist ersichtlich, dass auch L^T eine Lorentz-Transformation ist.
- Alternativ kann man schreiben

$$(L^{-1})^T \eta L^{-1} = (L^T)^{-1} \eta L^{-1} = (L^T)^{-1} L^T \eta L L^{-1} = \eta$$

(Danke an Alex für diesen Hinweis!)

4. **Assoziativität:** Ist automatisch erfüllt wegen Assoziativität von Verkettung von Abbildungen.

□

Aufgabe 02

a) Es seien (x_1, t_1) und (x_2, t_2) zwei Ereignisse mit zeitartigem Abstand in einem Inertialsystem Σ. Betrachten wir das Inertialsystem Σ', dass sich in Σ mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \underbrace{\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}}_{<1}$$

bewegt, und zum Zeitpunkt t_1 seinen Ursprung in x_1 hat, so erscheinen für Σ' beide Ereignisse am gleichen Ort.

b) Es seien (x_1, t_1) und (x_2, t_2) zwei Ereignisse mit raumartigem Abstand in einem Inertialsystem Σ. Dabei seien o.B.d.A $x_1^2 = x_2^2,\ x_1^3 = x_2^3$. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn durch einfache Drehung des Koordinatensystems, so dass $e_1 \parallel (x_2 - x_1)$ ist, bleibt der Abstand der Ereignisse im neuen Koordinatensystem immer noch raumartig. Betrachten wir nun das Inertialsystem Σ', dass sich in Σ mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \underbrace{\frac{(t_2 - t_1)}{(x_2^1 - x_1^1)}}_{<1}$$

entlang der x^1-Achse bewegt, so gilt in diesem Inertialsystem

$$t_2' - t_1' = \left(\frac{-v x_2^1}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{t_2}{\sqrt{1 - v^2}} \right) - \left(\frac{-v x_1^1}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{t_1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = \frac{(t_2 - t_1) - \overbrace{v(x_2^1 - x_1^1)}^{t_2 - t_1}}{\sqrt{1 - v^2}} = 0$$

□