Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009

Übungsserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

9. November 2008

Aufgabe 01

Aufgrund des Relativitätsprinzips bewegen sich kräftefreie Teilchen in allen Inertialsystemen gleichförmig, geradlinig (GG). Betrachten nun eine sich GG bewegende Uhr, die sich bzgl. des Inertialsystems Σ vom Ereignis (x_0, t_0) zum Ereignis $(x_0 + x_1, t_0 + t)$ bewegt. Diese sende zum Zeitpunkt t_0 einen Lichtpuls senkrecht zur ihrer Bewegungslinie gegen einen sich mitbewegenden Spiegel aus, so dass der Strahl die Uhr am Punkt $(x_0 + x, t_0 + t)$ wieder trifft.

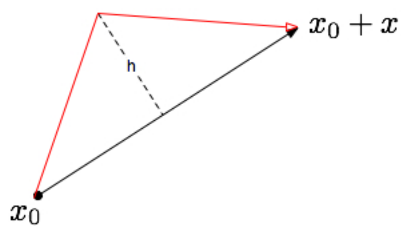

Abbildung 1: GG bewegende Uhr

Aus Symmetriegründen ist die vom Reflexionspunkt ausgehende zur Bahn senkrechte, auch Mittelsenkrechte auf die Verbindungsstrecke $[x_0, x_0 + x]$. Sogar sehen sowohl Σ als auch die Uhr den Abstand h gleich, da dieser senkrecht zur Bewegungsrichtung liegt. Für die Uhr vergeht zwischen Abstrahlung und Empfang die Zeit

$$\tau = 2h$$

Für den Beobachter Σ dagegen entspricht die Zeit t genau

$$t = 2\sqrt{h^2 + \frac{\|x\|^2}{4}} \overset{\tau=2h}{=} \sqrt{\tau^2 + \|x\|^2}$$

das heißt es ist

$$\tau^2 = t^2 - \|x\|^2$$

Da $\|x\| = vt$ für irgendeine Konstante v ist, gilt

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d}{dt}t\sqrt{1-v^2}\right)^2 = 1 - v^2 = \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 - \sum_i \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2$$

und man erhält den differentiellen Ausdruck

$$\boxed{d\tau^2 = \underbrace{dt^2 - \sum_i {dx^i}^2}_{-ds^2}} \tag{1}$$

Bemerke: Es wurde vorausgesetzt dass die Lichtgeschwindigkeit für die Uhr und den Beobachter gleich 1 ist.
Da jedes weitere Inertialsystem Σ' auch die Lichtgeschwindigkeit 1 empfindet, und natürlich aus der Uhr die gleiche Zeit abliest, ist $ds'^2 = -d\tau^2$ eine Inertialsystem-invariante.

Bemerkung: Da prinzipiell jeder Vektor v im Tangentialraum $T_P M$ eines Punktes P der Raumzeit M einer (in gegebenen kartesischen Kartenkoordinaten x^1, x^2, x^3) GG Weltlinie zugeordnet werden kann, ist der (0,2)-Tensor

$$ds^2 := \sum_{i=1}^{3} dx^i \otimes dx^i - dt \otimes dt$$

für alle *kartesische* Karten (mit Koordinatenvektoren $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t$ und dazu Dualen dx^1, dx^2, dx^3, dt) der gleiche.

Aufgabe 02

Zylinderkoordinaten

Beginnend mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$dx = \cos\varphi \; dr - r\sin\varphi \; d\varphi \quad , \quad dy = \sin\varphi \; dr + r\cos\varphi \; d\varphi$$

$$\Rightarrow \; ds^2 = \cos^2\varphi \; dr^2 + r^2\sin^2\varphi \; d\varphi^2 - 2r\cos\varphi\sin\varphi \; dr \; d\varphi + \sin^2\varphi \; dr^2 + r^2\cos^2\varphi \; d\varphi^2 + 2r\sin\varphi\cos\varphi \; dr \; d\varphi + dz^2 - c^2dt^2$$

$$= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

Kugelkoordinaten

Unter Verwendung der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \\ t \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi \; dr + r\cos\vartheta\cos\varphi \; d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi \; d\varphi$$

$$\text{Analog:} \quad dy = \sin\vartheta\sin\varphi \; dr + r\cos\vartheta\sin\varphi \; d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi \; d\varphi$$

$$\text{und:} \quad dz = \cos\vartheta \; dr - r\sin\vartheta \; d\vartheta$$

und erhalten so

$$ds^2 = (\sin\vartheta\cos\varphi \; dr + r\cos\vartheta\cos\varphi \; d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi \; d\varphi)^2$$

$$+ (\sin\vartheta\sin\varphi \; dr + r\cos\vartheta\sin\varphi \; d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi \; d\varphi)^2$$

$$+ (\cos\vartheta \; dr - r\sin\vartheta \; d\vartheta)^2 - c^2dt^2$$

$$= dr^2 + r^2 \; d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta \; d\varphi^2$$

Rotierendes Bezugssystem

Beginnend mit

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\varphi} + \Omega t \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$$

schreiben wir unter Verwendung von obigem Ergebnis

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \left(d\tilde{\varphi} + \Omega\ dt\right)^2 + d\tilde{z}^2 - c\ d\tilde{t}^2$$

$$= d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2\ d\tilde{\varphi}^2 + 2\tilde{r}^2\Omega\ d\tilde{\varphi}\ d\tilde{t} + d\tilde{z}^2 + \left(\tilde{r}^2\Omega^2 - c^2\right)\ d\tilde{t}^2$$