Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2008/2009
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

17. Februar 2009

Aufgabe 01

Die zwei Ereignisse seien in einem Inertialsystem Σ jeweils beschrieben durch die Koordinaten $(x_1^1, x_1^2, x_1^3, ct_1)$ und $(x_2^1, x_2^2, x_2^3, ct_2)$. Deren *Abstand* ist gegeben durch

$$ds^2 := \sum_{i=1}^{3}(x_1^i - x_2^i)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

und ist tatsächlich unabhängig vom gewählten Inertialsystem. Der Abstand heißt:

a) *Raumartig* falls $ds^2 > 0$ ist.

b) *Zeitartig* falls $ds^2 < 0$ ist.

c) *Lichtartig* falls $ds^2 = 0$ ist.

Es sei nun $ds^2 > 0$. Dabei seien o.B.d.A $x_1^2 = x_2^2,\ x_1^3 = x_2^3$. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn durch einfache Drehung des Koordinatensystems, so dass $e_1 \parallel (x_2 - x_1)$ ist, bleibt der Abstand der Ereignisse im neuen Koordinatensystem immer noch raumartig.
Betrachten wir nun das Inertialsystem Σ', dass sich in Σ mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{(x_2^1 - x_1^1)} \quad \rightsquigarrow \quad |v| < c$$

entlang der x^1-Achse bewegt, so gilt in diesem Inertialsystem (Lorentz-Transformation)

$$ct_2' - ct_1' = \left(\frac{-vx_2^1}{c\sqrt{1-v^2}} + \frac{ct_2}{\sqrt{1-v^2}}\right) - \left(\frac{-vx_1^1}{c\sqrt{1-v^2}} + \frac{ct_1}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \frac{c^2(t_2 - t_1) - \overbrace{v(x_2^1 - x_1^1)}^{c^2(t_2-t_1)}}{c\sqrt{1-v^2}} = 0$$

Aufgabe 02

Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten

$$R_{ik} - \frac{R}{2}g_{ik} = \varkappa T_{ik}$$

bzw.

$$R_{ik} = \varkappa\left(T_{ik} - \frac{T}{2}g_{ik}\right)$$

mit:

- Dem Ricci-Tensor
$$R_{ik} := R^a_{iak}$$

- Dem Krümmungsskalar
$$R := R^i_i = R_{ik}g^{ki}$$
als Kontraktion von R_{ik} und Maß für die lokale Krümmung der Raumzeit.

- Dem Energie-Impuls-Tensor
  $$T_{ik}$$
  als Maß für die Massen- bzw. Energiedichte und somit als Quellen-Term für die Metrik.
- Dem metrischen Tensor g der Raumzeit.
- Der Konstante
  $$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$
  die entsprechend gewählt ist, um im Grenzfall eine Übereinstimmung der klassischen Newton-Gravitationstheorie mit der ART zu gewährleisten.

Betrachten nun den Newtonschen Grenzfall, insbesondere geringer Geschwindigkeiten u mit der Metrik

$$g_{ik} = \eta_{ik} + f_{ik}$$

mit $|f_{ik}| \ll 1$. Dementsprechend:

1. Vernachlässigen wir in folgenden Betrachtungen jegliche quadratische Terme in Γ^k_{ij} und f_{ik}.
2. Betrachten wir Ableitungen nach $\partial_4 = \partial_{ct}$ gegenüber anderen Ableitungen als unwesentlich (nur schwache zeitliche Veränderungen).
3. Betrachten wir die Geschwindigkeit $u^4 \approx c$ als dominant.
4. Nähern Eigenzeiten τ durch Zeiten t.
5. Betrachten wir den Term $T_{44} = \mu c^2$ (Energiedichte) als dominierend, das heißt insbesondere
   $$T = T_{ik} g^{ik} \approx \mu c^2 \underbrace{g^{44}}_{\approx \eta^{44}} \approx -\mu c^2 \tag{1}$$

Mit

$$R^a_{bcm} = \partial_c \Gamma^a_{bm} - \partial_m \Gamma^a_{bc} + \Gamma^i_{bm}\Gamma^a_{ci} - \Gamma^i_{bc}\Gamma^a_{im} \overset{(1)}{\approx} \partial_c \Gamma^a_{bm} - \partial_m \Gamma^a_{bc}$$

folgt

$$R_{44} = R^c_{4c4} = \partial_c \Gamma^c_{44} - \underbrace{\partial_4 \Gamma^c_{4c}}_{\approx 0} \approx \partial_c \left[\frac{1}{2} \underbrace{g^{ci}}_{\approx \eta^{ci}} (\underbrace{\partial_4 g_{i4}}_{\partial_4 f_{i4}} + \underbrace{\partial_4 g_{i4}}_{\partial_4 f_{i4}} - \underbrace{\partial_i g_{44}}_{\partial_i f_{44}}) \right] \approx -\frac{1}{2} \eta^{ci} \partial_c \partial_i f_{44} \tag{2}$$

Betrachten wir die Geodätengleichung für ein, sich langsam bewegendes ($\tau \approx t$), freies Teilchen

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = -\Gamma^a_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \overset{(3)}{\approx} -\Gamma^a_{44} c^2 \overset{\text{analog}}{\approx} \frac{c^2}{2} \eta^{ci} \partial_i f_{44}$$

so folgt unter Vergleich mit den klassischen Erwartungen

$$\frac{d^2 x^c}{d\tau^2} \overset{(4)}{\approx} \frac{d^2 x^c}{dt^2} = -\eta^{ci} \partial_i U \tag{3}$$

(Newton) mit dem Gravitationspotential U, die Beziehung

$$\frac{c^2}{2} f_{44} \approx -U \tag{4}$$

Einsetzen von Gl. 2 und 4 in die EFG ergibt

$$\frac{1}{c^2} \eta^{ci} \partial_{ci} U \overset{(4)}{\approx} -\frac{1}{2} \eta^{ci} \partial_c \partial_i f_{44} \overset{(2)}{\approx} R_{44} \overset{\text{EFG}}{=} \varkappa \left(\underbrace{T_{44}}_{\mu c^2} - \underbrace{\frac{T}{2}}_{\approx -\frac{\mu c^2}{2}} \underbrace{g_{44}}_{\approx \eta_{44}} \right) \approx \frac{\varkappa}{2} \mu c^2 \tag{5}$$

das heißt

$$\boxed{\Delta U \approx \eta^{ci} \partial_{ci} U \overset{(5)}{\approx} \frac{\varkappa}{2} \mu c^4 = 4\pi G \mu}$$

was genau dem Newtonschen Grenzfall entspricht. Andernfalls könnte man $\varkappa$ genau aus obiger Beziehung bestimmen.

Aufgabe 03

Die Schwarzschild-Metrik beschreibt eine kugelsymmetrische Raumzeit im Vakuum, wie etwa die äußere Raumzeit in der Umgebung einer kugelsymmetrischen Massekonzentration. Sie resultiert allein aus dem Ansatz einer kugelsymmetrischen Raumzeit, der auf die Form

$$g = e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2\right) - e^{\nu(r,t)}c^2dt^2$$

führt, und den EFG im Vakuum, die auf die Gleichungen

$$R_{ik} = 0$$

führen. Dabei ist r_s (in erster Sicht ein Integrationskonstante) der so genannte *Schwarzschild-Radius*. Ist M die *Gesamtmasse* der die Raumzeit erzeugenden Energieverteilung für einen Beobachter im *unendlichen* ($r \to \infty$), so ist

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Betrachten nun ein zeitartiges Testteilchen (z.B. antriebsloser Satellit) im Bereich $r > r_s$, dessen Weltlinie durch seine Eigenzeit τ parametrisiert sei. Seine Bewegung kann durch die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_s}{r}} + r^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2\right) - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2\dot{t}^2$$

beschrieben werden, und man erhält über die Euler-Lagrange Gleichung

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{2\ddot{r}}{1-\frac{r_s}{r}} - \frac{\dot{r}^2 r_s}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} - 2r\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2\right) + \frac{r_s}{r^2}c^2\dot{t}^2$$

für $r = R : \text{const},\ \vartheta = \pi/2 : \text{const}$ die Beziehung

$$0 = -2R\dot{\varphi}^2 + \frac{r_s}{R^2}c^2\dot{t}^2 \tag{6}$$

Per Konstruktion ist außerdem

$$\mathcal{L} \equiv -c^2 \overset{r=R,\vartheta=\pi/2}{\Longrightarrow} R^2\dot{\varphi}^2 - \left(1-\frac{r_s}{R}\right)c^2\dot{t}^2 + c^2 = 0$$

Eingesetzt in Gl. 6 ergibt

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{r_s c^2}{R^2\left(2R-3r_s\right)}$$

also o.B.d.a

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{R}\sqrt{\frac{r_s}{(2R-3r_s)}} \quad\Rightarrow\quad \varphi(\tau) = \frac{c\tau}{R}\sqrt{\frac{r_s}{(2R-3r_s)}} + \text{const}$$

so dass sich die Eigenumlaufzeit über die Forderung

$$\varphi(\tau+\Delta\tau) \overset{!}{=} \varphi(\tau)$$

ergibt gemäß

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{(2R-3r_s)}{r_s}}} \tag{7}$$

Zurück zu Gl. 6, erhält man nun

$$\dot{t}^2 = \frac{2R}{2R-3r_s}$$

und somit

$$\Delta t = \int_0^{\Delta\tau}\dot{t}\ d\tau = \sqrt{\frac{2R}{2R-3r_s}}\cdot\Delta\tau$$

das heißt

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\pi R}{c}\sqrt{\frac{2R}{r_s}}} \tag{8}$$

Vergleich mit Newton: Umgeschrieben ist

$$\Delta t = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

was genau der Umlaufzeit eines Satelliten im Kontext der Newtonschen Gravitationstheorie entspricht!