Relativistische Physik

FSU Jena - WS 2007/2008
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

7. Februar 2009

Aufgabe 01

Aus

$$\eta_{mn} d\tilde{x}^m d\tilde{x}^n = \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^i} \eta_{mn} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^k} dx^i dx^k = \left[\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^T \eta \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right) \right]_{ik} dx^i dx^k$$

folgt die äquivalente Bedingung

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^T \eta \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)}_{\Lambda} \stackrel{!}{=} \eta$$

Fordert man Λ : const so ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right) = \Lambda$$

als die affine Transformation

$$\boxed{\tilde{x}(x) = \Lambda \cdot x + x_0}$$

Die Menge aller solcher Transformationen bilden die Poincaré Gruppe, die Menge aller Λ bilden die Lorentz-Gruppe.

Aufgabe 02

Betrachten Elektron-Positron-Annihilation im Inertialsystem des Elektrons und machen die Annahme dass nur ein Photon entstehe. Es sei

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \\ \frac{m_e}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}$$

der vierer-Impuls des Positrons (Geschwindigkeit v) und λ die Wellenlänge des entstehenden Photons. Setzen wir o.B.d.A die 1. Achse entlang der Ausbreitungsrichtung des Positrons und die 2. so dass das Photon sich in der x^1x^2-Ebene ausbreitet (x^1x^2-Ebene aufgespannt durch Positron & Photon-Richtungen), so muss nach Impulserhaltung gelten

$$\frac{h}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{m_e^2 + p^2} + m_e \end{pmatrix}$$

das heißt insbesondere

$$\frac{h^2}{\lambda^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} \cos^2\vartheta + \frac{h^2}{\lambda^2} \sin^2\vartheta = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\lambda} = p$$

und somit

$$p = \frac{h}{\lambda} = \sqrt{m_e^2 + p^2} + m_e \quad \stackrel{m_e \neq 0}{\Rightarrow} \quad p = 0$$

Doch dies ist ein Widerspruch zu $\lambda \in (0, \infty)$.

Aufgabe 03

Ein lokales Inertialsystem am Punkt $a \in M$ der semi-Riemanschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Karte $\psi : U_a \to \mathbb{R}^n$ auf einer Umgebung $U_a \ni a$ in den Koordinaten x^i so dass gilt

$$g\big|_a = \eta \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_a = 0 \;\; \forall \; i,j,k$$

das heißt die Metrik ist in a diagonal (gleiche Form wie Minkowski Metrik) und sämtliche erste Ableitungen deren Komponenten verschwinden. Diese Koordinaten nennt man Riemann-Normalkoordinaten.

Äquivalenzprinzip

Da sämtliche 1. Ableitungen der Metrik-Komponenten verschwinden, verschwinden auch die Christoffel Symbole

$$\Gamma^k_{ij}\big|_a = \frac{1}{2} g^{lk}\left[\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right]$$

In dieser Karte lauten in a also die Geodätengleichungen

$$\ddot{x}^i\big|_a = 0 \;, \;\; i = 1,..,n$$

(freies Teilchen beschleunigt sich nicht) das heißt im entsprechenden Bezugssystem scheint der Raum (lokal!) flach zu sein, und es gilt die gravitationsfreie (speziell relativistische) Physik. Tatsächlich entspricht solch ein Bezugssystem einem *frei fallenden* Beobachter (Äquivalenzprinzip).

Produktregel

Seien T, G Tensorfelder auf M. Zu zeigen wäre

$$\nabla_{\partial_{i_0}}(T \otimes G) = T \otimes \nabla_X G + (\nabla_X T) \otimes G$$

das heißt in beliebigen Koordinaten

$$\left[\nabla_{\partial_{i_0}}(T \otimes G)\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G} = \left[(\nabla_{\partial_{i_0}} T) \otimes G\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G} + \left[T \otimes \nabla_{\partial_{i_0}} G\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G}$$

Wählen die Riemann-Normalkoordinaten und schreiben

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_{\partial_{i_0}}(T \otimes G)\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G} &\overset{\text{R.N.K}}{=} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}}(T \otimes G)^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G} = \frac{\partial}{\partial x^{i_0}}\left(T^{\mathbf{j}_T}_{\mathbf{i}_T} \cdot G^{\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_G}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}} T^{\mathbf{j}_T}_{\mathbf{i}_T}\right) \cdot G^{\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_G} + T^{\mathbf{j}_T}_{\mathbf{i}_T} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_0}} G^{\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_G}\right) \\
&\overset{\text{R.N.K}}{=} \left(\nabla_{\partial_{i_0}} T\right)^{\mathbf{j}_T}_{\mathbf{i}_T} \cdot G^{\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_G} + T^{\mathbf{j}_T}_{\mathbf{i}_T} \cdot \left(\nabla_{\partial_{i_0}} G\right)^{\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_G} \\
&= \left[(\nabla_{\partial_{i_0}} T) \otimes G\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G} + \left[T \otimes \nabla_{\partial_{i_0}} G\right]^{\mathbf{j}_T\mathbf{j}_G}_{\mathbf{i}_T\mathbf{i}_G}
\end{aligned}$$

Bemerke: Es gilt **nicht**

$$\nabla(T \otimes G) = (\nabla T) \otimes G + T \otimes (\nabla G)$$

Aufgabe 04

Beginnend mit der Lagrange Funktion für ein raumartiges Teilchen

$$\mathcal{L}(r, \vartheta, \varphi, t, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{t}, \tau) = \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2$$

erhalten wir die Lagrange-Gleichung

$$0 = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = \frac{2r}{r - r_s} \cdot \ddot{r} - \frac{r_s}{(r - r_s)^2} \cdot \dot{r}^2 - 2r\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{r_s c^2}{r^2} \cdot \dot{t}^2 \tag{1}$$

Mit

$$\mathcal{L} \equiv -c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2\dot{t}^2 = \frac{r}{r-r_s} \cdot \left[\frac{r}{r-r_s} \cdot \dot{r}^2 + c^2\right]$$

und ϑ, φ : const ergibt sich eingesetzt in Gl. 1 die DGL:

$$\ddot{r} = -\frac{r_s c^2}{2r^2}$$

was genau der Newtonschen Bewegungsgleichung eines, geradezu auf einen *Massenmittelpunkt*, frei fallenden Teilchens entspricht. Mit dem *effektiven Potential*

$$U(r) := -\frac{r_s c^2}{2r}$$

folgt dann wegen der Bedingung

$$\lim_{r\to\infty} \dot{r} = 0 \tag{2}$$

die Bilanzgleichung

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) = 0$$

(erstes Integral, vgl. Energieerhaltung) bzw. die DGL

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{r_s c^2}{r}} \tag{3}$$

deren allgemeine Lösung sich ergibt gemäß

$$r^{\frac{3}{2}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{r_s c^2} \cdot \tau + \text{const}$$

Aus den Bedingungen

$$\lim_{\tau\to-\infty} r(\tau) = \infty \quad \wedge \quad r(0) = 10r_s$$

folgt die spezielle Lösung

$$\boxed{r^{\frac{3}{2}}(\tau) = -\frac{3}{2}\sqrt{r_s c^2} \cdot \tau + (10r_s)^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

Zur Eigenzeit

$$\boxed{\tau_s = \frac{2r_s}{3c}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)} \tag{5}$$

erreicht das Teilchen den Schwarzschild Radius r_s. Aus der Lagrange Funktion ist ersichtlich dass

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} =: D : \text{const}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Mit der Bedingung

$$\lim_{r\to\infty} \dot{t} \overset{!}{=} 1$$

ergibt sich $D = 1$ das heißt

$$\dot{t} = \frac{r}{r-r_s}$$

Die entsprechende Koordinatenzeit von $10r_s$ bis r_s ist also gegeben durch

$$\Delta t = \int_0^{\tau_s} \dot{t}\ d\tau = \int_{10r_s}^{r_s} \frac{d\tau}{dr}\dot{t}(r)\ dr = \int_{10r_s}^{r_s} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{-1} \dot{t}(r)\ dr \overset{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt{r_s c^2}} \int_{r_s}^{10r_s} \frac{\overbrace{r\sqrt{r}}^{\geq r_s^{\frac{3}{2}}}}{\underbrace{r-r_s}_{\geq 0}}\ dr$$

$$\geq \frac{r_s}{c} \underbrace{\int_{r_s}^{10r_s} \frac{dr}{r-r_s}}_{\infty} = \infty$$

das heißt für den Beobachter in Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, t)$ erreicht das Teilchen nie den Schwarzschild-Radius.