13. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag, den 03.02.2009, in der Vorlesung.

Aufgabe 37: (8 Punkte)

Betrachten Sie den (relativen) Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms $H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$ mit der reduzierten Masse μ. Definieren Sie den Runge-Lenz-Operator als $\vec{M} = \frac{1}{2\mu}(\vec{p}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{p}) - \frac{e^2}{r}\vec{r}$.
a) Es gelten die folgenden Kommutatorrelationen (die Sie nicht nachzurechnen brauchen):

$$[H, \vec{M}] = 0 \qquad [M_i, M_j] = -2i\frac{\hbar}{\mu}H\epsilon_{ijk}L_k \qquad [L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k.$$

Zeigen Sie, dass diese Kommutatorrelationen sich durch Einführung von

$$\vec{I} = \frac{1}{2}(\vec{L} + \sqrt{\frac{-\mu}{2H}}\vec{M}) \qquad \vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{L} - \sqrt{\frac{-\mu}{2H}}\vec{M})$$

in die folgende Algebra überführen lassen:

$$[I_i, I_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}I_k \qquad [K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \qquad [I_i, K_j] = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator sich für gebundene Zustände schreiben lässt als $H = -\frac{\mu e^4}{2}\frac{1}{2(\vec{I}^2+\vec{K}^2)+\hbar^2}$. (Dazu können Sie sich zunächst überlegen, wie sich $\vec{M}^2$ schreiben lässt.) Wie sähen demzufolge die Energieniveaus des Wasserstoffatoms aus?
c) Zeigen Sie, dass wegen $\vec{L}\cdot\vec{M} = 0$ gilt, dass $E_n = -\frac{1}{2}\mu\frac{e^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...$
Erläutern Sie dann, weshalb das Energieniveau E_n n^2-fach entartet ist.

Aufgabe 38: (6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich zwischen zwei konzentrisch angeordneten Kugeln mit Radius a bzw. b (also zwischen $a < r < b$). Das Potenzial verschwinde in diesem Bereich. Finden Sie die Energie des Grundzustandes und die normierte Grundzustandswellenfunktion.

Aufgabe 39: (6 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Wellenfunktion eines Elektrons in einem Wasserstoffatom gegeben durch $\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1})$.
a) Geben Sie den Erwartungswert der Energie in diesem Zustand an.
b) Geben Sie die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t > 0$ an.
c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron zu irgendeinem Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $l = 1, m = +1$ zu finden?