12. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag, den 27.01.2009, in der Vorlesung.

Aufgabe 34: (8 Punkte)

Betrachten Sie das Potenzial

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} -V_0, & \text{für } |\vec{x}| \leq a \\ 0, & \text{für } |\vec{x}| > a \end{cases} .$$

a) Geben Sie Symmetrien und die dazugehörigen Erhaltungsgrößen an.
b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Form $\psi(\vec{x}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ hat, und bestimmen Sie die Differenzialgleichung für R.
c) Zeigen Sie, dass $R_l(z) = a_l j_l(z) + b_l n_l(z)$ die allgemeine Form der Lösung ist, wobei

$$j_l(z) = (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin(z)}{z}, \quad n_l(z) = -(-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos(z)}{z}$$

die sphärischen Bessel-Funktionen bzw. sphärischen Neumann-Funktionen sind.
d) Bestimmmen Sie deren asymptotisches Verhalten und leiten Sie daraus Einschränkungen an die Koeffizienten a_l und b_l ab.
e) Geben Sie die Energiebedingung für die gebundenen Zustände mit Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ an.

Aufgabe 35: (6 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Kann es sich um physikalische Observable handeln?
b) Was ist die physikalische Bedeutung dieser Operatoren? (Hinweis: Betrachten Sie hierzu die Kommutatorrelationen und Eigenwerte.)

Aufgabe 36: (6 Punkte)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom (verallgemeinert auf eine beliebige Kernladungszahl Z) und berechnen Sie folgende Erwartungswerte für Potenzen des Abstands vom Ursprung bezüglich des Grundzustands:

$$\langle r \rangle, \quad \langle r^2 \rangle, \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle .$$

Gilt $\langle r \rangle^{-1} = \langle r^{-1} \rangle$? Wie verhält sich der wahrscheinlichste Abstand zum mittleren Abstand?