

11. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK I

Abgabe am Dienstag, den 20.01.2009, in der Vorlesung.

Aufgabe 31:

(7 Punkte)

Die stationäre Schrödingergleichung für einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)\right)\psi = E\psi.$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E und Eigenfunktionen ψ .
- Bestimmen Sie die Entartungsgrade der Energieeigenzustände für den Fall $\omega_1 = \omega_2$ und $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.
- Bestimmen Sie die Parität der Zustände, d.h., die Eigenschaft der Zustände unter Spiegelungen des Ortsraumes am Ursprung.

Aufgabe 32:

(7 Punkte)

- Zeigen Sie, dass in sphärischen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, & L_x &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_y &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & L_{\pm} &= i\hbar e^{\pm i\phi} \left(\mp i \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned}$$

- Das Legendre-Polynom $P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$ ist die Koordinatendarstellung eines Drehimpulseigenzustandes, der Eigenvektor zu \mathbf{L}^2 und L_z ist. Berechnen Sie explizit die Eigenwerte von \mathbf{L}^2 und L_z .

Aufgabe 33:

(6 Punkte)

Ein starrer Körper mit dem Trägheitsmoment I und der Winkelgeschwindigkeit ω hat die kinetische Rotationsenergie $E = \frac{1}{2}I\omega^2$.

- Benutzen Sie den Drehimpulsbetrag $|\mathbf{L}| = I\omega$, um die stationäre Schrödingergleichung der quantenmechanischen Rotationsbewegung des Körpers aufzustellen.
- Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und das Energiespektrum.
- Der Abstand der Protonen in einem H_2 -Molekül ist ungefähr $r = 0.074\text{nm}$. Das Trägheitsmoment um den Massenmittelpunkt sei $I = \frac{1}{2}m_p r^2$, wobei $m_p \simeq 938\text{MeV}/c^2$ die Masse des Protons ist. Wie groß ist die Rotationsenergie für den ersten angeregten Zustand $l = 1$ für H_2 ? Wie groß ist die Wellenlänge λ der Strahlung, die beim Übergang von $l = 1$ zu $l = 0$ emittiert wird?