10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag, den 13.01.2009, in der Vorlesung.

Aufgabe 28: (6 Punkte)

Verwenden Sie die Eigenschaften der Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators, $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, sowie die Ortsraumdarstellung, um folgende Differentialgleichungen für die Hermite-Polynome H_n abzuleiten:

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d}{d\zeta} + 2n\right] H_n(\zeta) = 0, \quad \frac{d}{d\zeta}H_n(\zeta) = 2nH_{n-1}(\zeta), \quad \left[2\zeta - \frac{d}{d\zeta}\right] H_n(\zeta) = H_{n+1}(\zeta).$$

Aufgabe 29: (7 Punkte)

Betrachten Sie die kohärenten Zustände $|\xi\rangle$ des harmonischen Oszillators.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p_n, bei einer Energiemessung von $|\xi\rangle$ die Energie E_n zu messen, gegeben ist durch die *Poisson-Verteilung*:

$$p_n = \frac{1}{n!}\,|\xi|^{2n}\,e^{-|\xi|^2}.$$

(b) Prüfen Sie nach, dass diese Wahrscheinlichkeit korrekt normiert ist, d.h., dass die Wahrscheinlichkeit, irgend eine Energie zu messen, gleich 1 ist.

(c) Bestimmen Sie die Energieunschärfe ΔE des kohärenten Zustands $|\xi\rangle$. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Die Energieunschärfe ist proportional zur Unschärfe der Besetzungszahl, $\Delta E = \hbar\omega\Delta N$. Um die nötigen Erwartungswerte von N bzw. N^2 bezüglich $|\xi\rangle$ zu bestimmen, zeigen Sie zunächst, dass die sogenannte Erzeugende Funktion $F(z)$ wie folgt dargestellt werden kann:

$$F(z) := \langle e^{zN}\rangle_\xi \overset{\text{zu zeigen}}{=} \frac{\exp\left(|\xi|^2 e^z\right)}{\exp\left(|\xi|^2\right)}.$$

Bestimmen Sie nun die Energieunschärfe mit Hilfe von $F'(0)$ und $F''(0)$.

(d) Überprüfen Sie, ob zwei kohärente Zustände $|\xi\rangle$ und $|\xi'\rangle$ orthogonal sein können.

Aufgabe 30: (7 Punkte)

Durch $V(x+a) = V(x)$ sei ein periodisches Potential in einer Dimension definiert. Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m in diesem Potential:

(a) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator $T(a) = e^{-\frac{i}{\hbar}pa}$ mit dem Hamilton-Operator kommutiert.

(b) Zeigen Sie, dass sich eine um a räumlich verschobene Energieeigenfunktion höchstens um eine Phase von der nichtverschobenen Energieeigenfunktion unterscheidet.

(c) Wenn der Phasenfaktor über die Wellenfunktion $\psi_E(x)$ definiert ist gemäß $\psi_E(x'+a) = \langle x'|T^{-1}(a)|\psi_E\rangle \equiv e^{ika}\langle x'|\psi_E\rangle = e^{ika}\psi_E(x')$, so zeigen Sie, dass die simultane Eigenfunktion von T und H als *Blochwelle* geschrieben werden kann: $\psi_E(x') = e^{ikx'}u_k(x')$, wobei $u_k(x')$ periodisch ist, $u_k(x'+a) = u_k(x')$.

(d) Zeigen Sie, dass die periodische Amplitude $u_k(x')$ folgende Gleichung erfüllt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u_k}{dx'^2} - \frac{i\hbar^2 k}{m}\frac{du_k}{dx'} + V(x')u_k = \left(E - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right)u_k.$$