

5. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK I

Abgabe am Dienstag, den 25.11.2008, in der Vorlesung.

Aufgabe 13:

(5 Punkte)

Verifizieren Sie für Operatoren A und B und $\epsilon > 0$ die Baker-Campbell-Hausdorff-Relation bis zur 3. Ordnung in ϵ :

$$e^{\epsilon A} e^{\epsilon B} = e^{\epsilon A + \epsilon B + \frac{\epsilon^2}{2}[A, B] + \frac{\epsilon^3}{12}[A, [A, B]] + \frac{\epsilon^3}{12}[B, [B, A]] + \dots}$$

Aufgabe 14:

(8 Punkte)

Betrachten Sie ein Gaußsches Wellenpaket der Breite d im Ortsraum,

$$\psi(x') = \langle x' | \psi \rangle = N \exp\left(ikx' - \frac{x'^2}{2d^2}\right).$$

- Bestimmen Sie die Normierung N , so dass $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.
- Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, und $\langle p^2 \rangle$.
- Bestimmen Sie die Varianzen $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ und $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ und zeigen Sie, dass das Gaußsche Wellenpaket die Unschärferelation minimal erfüllt.
- Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(p') = \langle p' | \psi \rangle$ im Impulsraum.
- Diskutieren Sie die Limites $d \rightarrow 0$ und $d \rightarrow \infty$ in Orts- und Impulsraum.

Aufgabe 15:

(7 Punkte)

Der Translationsoperator für eine endliche räumliche Verschiebung ist gegeben durch

$$T(\mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}\right)$$

- Berechnen Sie $[\mathbf{x}, T(\mathbf{a})]$.
- Betrachten Sie den Erwartungswert $\langle |\mathbf{x}| \rangle$ bezüglich eines beliebigen Zustands $|\psi\rangle$ und zeigen Sie, wie sich der Erwartungswert bei einer Translation des Zustands $|\psi\rangle \rightarrow T(\mathbf{a})|\psi\rangle$ ändert.