3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag, den 11.11.2008, in der Vorlesung.

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Betrachten Sie einen Ket-Vektorraum mit der orthonormalen Basis $\{|a'\rangle\}$ von Eigenkets eines hermiteschen Operators A. Das Eigenwertspektrum sei nicht entartet, d.h. keine zwei Eigenwerte sind gleich.

(a) Zeigen Sie, dass $\prod_{a'}(A - a')$ der Nulloperator ist.

(b) Welche Bedeutung und Eigenschaften hat der folgende Operator:

$$P_{a'} = \prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$$

(c) Verdeutlichen Sie (a) und (b) anhand von $A = S_z$ für ein Spin-$\frac{1}{2}$ System.

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Sei X ein linearer Operator und $\{|a'\rangle\}$ eine orthonormale Basis eines Ket-Vektorraums. Die Spur eines Operators ist definiert durch

$$\mathrm{tr}\, X := \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $\mathrm{tr}\, X$ ist unabhängig von der Wahl der Basis, d.h.
$\mathrm{tr}\, X = \sum_{b'} \langle b'|X|b'\rangle$, für eine alternative orthonormale Basis $\{|b'\rangle\}$

(b) $\mathrm{tr}\, X^\dagger = (\mathrm{tr}\, X)^*$

(c) $\mathrm{tr}\,(\lambda X) = \lambda\, \mathrm{tr}\, X, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

(d) $\mathrm{tr}\,(X + Y) = \mathrm{tr}\,(Y + X)$

(e) $\mathrm{tr}\,(XY) = \mathrm{tr}\,(YX)$

(f) $\mathrm{tr}\,(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a'a''}$

Aufgabe 9: (8 Punkte)

Betrachten Sie die Unschärferelation für die Drehimpulsoperatoren S_x und S_y im Stern-Gerlach-Experiment: $\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}|\langle[S_x, S_y]\rangle|^2$. Ist die Unschärferelation immer erfüllt? Bestimmen Sie diejenigen Zustände, für die das Gleichheitszeichen gilt. (Hinweis: arbeiten Sie in der $|\pm\rangle = |S_z; \pm\rangle$ Basis und überzeugen Sie sich zunächst, dass ein allgemeiner normierter Stern-Gerlach-Zustand ohne Beschränkung der Allgemeinheit als $|\ \rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi}|-\rangle$ geschrieben werden kann.)