2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag, den 04.11.2008, in der Vorlesung.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Die Ket-Vektoren $|\pm\rangle := |S_z;\pm\rangle$ sind Eigenvektoren des S_z Operators (z-Komponente des Drehimpulses des Silberatoms), $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ und bilden eine orthonormierte Basis für das Stern-Gerlach-Experiment. In Matrixdarstellung lassen sich diese Basis-Vektoren schreiben als $|+\rangle \hat{=} \binom{1}{0}$, $|-\rangle \hat{=} \binom{0}{1}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Drehimpulskomponenten in Matrixdarstellung schreiben lassen als

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3,$$
$$\text{mit} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dazu, dass $S_x|S_x;\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|S_x;\pm\rangle$ und ähnlich für S_y.

(b) Verifizieren Sie, dass diese *Pauli-Spinmatrizen* σ_i folgende Identität erfüllen:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k,$$

wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe ist.

(c) Berechnen Sie den Kommutator und Antikommutator zweier Spinmatrizen:

$$\begin{aligned} \text{Kommutator:} \quad & [\sigma_i,\sigma_j] := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \\ \text{Antikommutator:} \quad & \{\sigma_i,\sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Benutzen Sie die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion, um zu zeigen, dass

$$U = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = \mathbb{1}\,\cos\alpha + i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\alpha}\sin\alpha, \quad \alpha = |\boldsymbol{\alpha}|.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass $UU^\dagger = \mathbb{1}$ und $\det U = 1$. (Es gilt $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \sigma_i\alpha_i$ und $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$).

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Ein Stern-Gerlach-Apparat werde in Richtung des Vektors $\hat{\mathbf{n}}$ ausgerichtet. In Kugelkoordinaten sei $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Konstruieren Sie (ausgehend von der S_z-Basis mit Basiskets $|\pm\rangle := |S_z;\pm\rangle$) den Eigenket $|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle$ zum Drehimpulsoperator $S_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ Richtung. Dieser muss die Gleichung $S_{\hat{\mathbf{n}}}|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle$ erfüllen.