

1. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENMECHANIK I

Abgabe am Dienstag, den 28.10.2008, in der Vorlesung.

Aufgabe 1:

(5 Punkte)

Einige klassische Betrachtungen zum Stern-Gerlach-Apparat: Die Silberatome werden bei $T = 2227^\circ\text{C}$ verdampft.

- (a) Wie groß ist ihre Geschwindigkeit im Quadratmittel? Zur Erinnerung: $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle_T = \frac{1}{2}k_B T$, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist.

Nehmen Sie klassisch an, dass das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ der Atome durch eine Eigendrehung der Ladungsverteilung mit Drehimpuls \mathbf{J} zustandekäme, $\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{J}$. Die zeitliche Änderung des atomaren Drehimpulses in einem Magnetfeld \mathbf{B} ist gegeben durch

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

- (b) Wenn \mathbf{B} in z Richtung liegt, und anfänglich für ein Atom $J_z = 0$ ist, nach welcher Zeit kehrt \mathbf{J} seine Richtung um?
- (c) Welche Strecke d hat das Atom dann mit der obigen Geschwindigkeit im Quadratmittel zurückgelegt. Wählen Sie als Zahlenbeispiel $\gamma|\mathbf{B}| = 1.76 \times 10^5 \frac{1}{\text{s}}$.

Aufgabe 2:

(5 Punkte)

Welche Eigenwerte besitzt e^A , wenn der Operator A der Gleichung $A^2 = A$ genügt und diagonalisierbar ist? Besitzen die Operatoren A und e^A ein Inverses?

Aufgabe 3:

(10 Punkte)

Sei

$$U(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Beweise die Gruppeneigenschaft $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_1 + \theta_2)$.
- (b) Berechne die ersten drei Koeffizienten der Potenzreihe

$$U(\theta) = U_0 + \left(\frac{\theta}{2}\right) U_1 + \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 U_2 + \dots$$

- (c) Überzeugen Sie sich davon, dass die Reihe in (b) in eine Exponentialfunktion aufsummiert werden kann,

$$U(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}U_1} = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_2}, \quad \text{mit } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$