

**(28) Holstein–Primakoff-Transformation**

**3 P.**

Betrachten Sie die Operatoren

$$J_+ = \sqrt{2j - a^\dagger a} a, \quad J_- = a^\dagger \sqrt{2j - a^\dagger a}$$

mit  $j > 0$ , wobei  $a$  und  $a^\dagger$  die Vertauschungsrelation  $[a, a^\dagger] = 1$  erfüllen mögen. Finden Sie einen Operator  $J_z(a, a^\dagger)$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad \vec{J}^2 = j(j+1).$$

**(29) Schwinger-Bosonen**

**3 P.**

Es seien  $a^\dagger, a$  und  $b^\dagger, b$  miteinander kommutierende Erzeuger-Vernichter-Paare mit Vertauschungsrelationen  $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$ . Welcher Operator  $J_z$  spannt mit  $J_+ = a^\dagger b = (J_-)^\dagger$  die Drehimpulsalgebra auf? Zeigen Sie, daß die Zustände

$$|jm\rangle = \frac{(a^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0_a 0_b\rangle$$

mit  $a|0_a 0_b\rangle = b|0_a 0_b\rangle = 0$  und  $|m| \leq j$  gemeinsame Eigenzustände von  $\vec{J}^2$  und  $J_z$  mit Quantenzahlen  $j, m$  sind. (Vergleiche Aufgabe 27!)

In den Aufgaben 28 und 29 werden die Drehimpulse in Einheiten von  $\hbar$  gemessen.

**(30) Unschärferelation für Drehimpulse**

**3 P.**

Verifizieren Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$$

explizit für  $A = J_x, B = J_y$  und  $|\psi\rangle = |jm\rangle$ . Für welche Werte  $m$  zu vorgegebenem  $j$  gilt Gleichheit?

**(31) Kugelflächenfunktionen**

**4 P.**

Die normierte Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\alpha^{5/2}}{\sqrt{7\pi}} (\alpha^{-1} + x + 2y + z) e^{-\alpha r}, \quad \alpha > 0.$$

- Enwickeln Sie  $\psi(\vec{r})$  nach den Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ .
- Es wird eine Messung von  $\vec{L}^2$  vorgenommen. Welches sind die möglichen Meßergebnisse? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für jeden der möglichen Werte.
- Beantworten Sie die Fragen in b) für eine Messung von  $L_z$ .