Übungen zur Quantenmechanik I – SS 2007

H 9

Abgabetermin: 26.06.07

(25) Teilchen im harmonischen Oszillator **3 P.**

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens im Potential des eindimensionalen harmonischen Oszillators gegeben durch

$$\psi(x,0) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-(\beta x)^2/2}\big(2a(\beta x)^2 + b\big)$$

mit $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$ sowie reellen Konstanten a und b. Bestimmen Sie $\psi(x,t)$. Welches sind die möglichen Energiemeßwerte, und wie lauten die relativen Wahrscheinlichkeiten, diese zu erhalten? Berechnen Sie $\langle X\rangle(t)$ und $\langle P\rangle(t)$. (Die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ muß zur Beantwortung dieser Fragen nicht berechnet werden.)

(26) Kohärenter Zustand – Teil 2 **4 P.**

Betrachten Sie den Zustand $|\alpha_0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha_0|^2/2}\,\mathrm{e}^{\alpha_0 a^\dagger}|0\rangle$ aus Aufgabe (24), wobei $|0\rangle$ der Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist.

a) Zeigen Sie, daß $|\alpha_0\rangle$ Eigenzustand vom Vernichter a ist, entwickeln Sie ihn nach den Energieeigenzuständen $|n\rangle$, und bestimmen Sie seine Zeitentwicklung $|\alpha(t)\rangle$ mit $|\alpha(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. (Der Einfachheit halber wählen Sie die Energieskala so, daß $|0\rangle$ verschwindende Energie hat.)

b) Bestimmen Sie das Produkt der Schwankungen von Orts- und Impulsoperator im Zustand $|\alpha(t)\rangle$, wobei Sie die Ergebnisse $\langle X\rangle = 2x_0\,\mathrm{Re}\,\alpha(t)$ und $\langle P\rangle = (\hbar/x_0)\,\mathrm{Im}\,\alpha(t)$ aus Aufgabe (24) verwenden können.

c) Zeigen Sie, daß $|\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a}|0\rangle$, schreiben Sie $\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a$ als Linearkombination von X und P, und benutzen Sie dies, um die Ortswellenfunktion

$$\langle x|\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle P\rangle(x-\langle X\rangle/2)/\hbar}\,\langle x - \langle X\rangle|0\rangle$$

des kohärenten Zustandes herzuleiten.

(27) Der zweidimensionale harmonische Oszillator **6 P.**

Der Hamilton-Operator des zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{i=1}^{2}\big(P_i^2 + Q_i^2\big)$$

mit reskalierten Operatoren, welche die Vertauschungsrelationen $[Q_i\,, P_j] = \mathrm{i}\delta_{ij}$ erfüllen.

a) Führen Sie Leiteroperatoren $a_i = (Q_i + \mathrm{i}P_i)/\sqrt{2}$ und entsprechende $a_i^\dagger$ ein und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Berechnen Sie $[N_i\,, (a_j^\dagger)^n]$ mit $N_i = a_i^\dagger a_i$.

b) Zeigen Sie, daß die Zustände $|n_1\, n_2\rangle = \mathcal{N}(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}|0\,0\rangle$ mit $a_i|0\,0\rangle = 0$ Eigenzustände von den N_i und damit von H sind. Wie lautet der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?

c) Führen Sie Leiteroperatoren $b_i = (a_1 + (-)^i\,\mathrm{i}a_2)/\sqrt{2}$ und entsprechende $b_i^\dagger$ ein und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Drücken Sie H sowie den Drehimpulsoperator $L = \hbar(Q_1P_2 - Q_2P_1)$ durch diese Operatoren aus.

d) Zeigen Sie, daß die Zustände $|m_1\, m_2\rangle = \mathcal{N}'(b_1^\dagger)^{m_1}(b_2^\dagger)^{m_2}|0\,0\rangle$ Eigenzustände von H sowie L sind. Welche Drehimpulseigenwerte sind bei vorgegebener Energie möglich?