Übungen zur Quantenmechanik I – SS 2007 $\boxed{\text{H 8}}$

Abgabetermin: 19.06.07

(22) Identitäten für Pauli-Matrizen **3 P.**

a) Zeigen Sie für beliebige Operatoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$, daß

$$(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\vec{\sigma}(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{A}\cdot\vec{\sigma})\vec{B} + \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{\sigma} - \mathrm{i}(\vec{A}\times\vec{B})\mathbb{1} \ .$$

b) Es seien q und z komplexe Zahlen. Wie lautet die Matrix $q^{z\sigma_3}$ explizit?

(23) Spinpräzession **6 P.**

Der Hamilton-Operator eines Elektronspins in einem homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_x$ lautet $H = \mu\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$ mit $\mu = eg\hbar/4mc$ und $g \approx 2$ (d.h., es werden für das ortsfeste Elektron nur die Spinfreiheitsgrade betrachtet). Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Elektron im Zustand $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$, wobei $|\pm\rangle$ die Eigenzustände von $S_z = \hbar\sigma_3/2$ bezeichnen.

a) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung des Elektronspins, indem Sie die Schrödinger-Gleichung für die Komponenten des Zustandes $|\psi(t)\rangle = a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle$ lösen.

b) Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ noch einmal, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H berechnen und diese benutzen, um den Zeitentwicklungsoperator auf dem Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$ auszuwerten.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei einer Messung von S_z zur Zeit $t > 0$ der Meßwert $-\hbar/2$?

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle\vec{S}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\vec{S}|\psi(t)\rangle$ des Spinoperators $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$, und zeigen Sie, daß dieser eine Präzessionsbewegung (mit welcher Kreisfrequenz?) um die Feldrichtung ausführt.

(24) Kohärenter Zustand **4 P.**

Betrachten Sie einen sogenannten kohärenten Zustand $|\alpha\rangle = N\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$, des eindimensionalen harmonischen Oszillators, wobei $|0\rangle$ der durch $a|0\rangle = 0$ definierte Grundzustand ist. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N sowie die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators $\langle\alpha|X|\alpha\rangle$ bzw. $\langle\alpha|P|\alpha\rangle$. (Die Kommutatoridentitäten aus den Aufgaben (13) und (14) erweisen sich hier als nützlich.)