Übungen zur Quantenmechanik I – SS 2007 $\boxed{\text{H 7}}$

Abgabetermin: 05.06.07

(19) Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators **2 P.**

Ein Teilchen der Masse m befinde sich im Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Es soll eine Abschätzung der Grundzustandsenergie gewonnen werden. Verwenden Sie dazu die Unschärferelation $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$, um das Minimum der mittleren Energie $\bar{E} = \langle H \rangle$ als Funktion von ΔX zu bestimmen. (Aus Symmetriegründen dürfen Sie voraussetzen, daß $\langle X \rangle = \langle P \rangle = 0$.)

(20) Teilchen im Morse-Potential **5 P.**

In Aufgabe (18) wurde gezeigt, daß der Mittelwert des Ortsoperators $\langle X \rangle$ die Bewegungsgleichung $m\,\partial_t^2 \langle X \rangle = \langle f(X) \rangle$ erfüllt, wobei $f(x) = -V'(x)$ die Kraft ist.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ bis zur quadratischen Ordnung um $\langle X \rangle$, und geben Sie den Mittelwert der Kraft $\langle f(X) \rangle$ in derselben Ordnung an.

b) Ein Teilchen mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x) \propto \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/2b^2}$ befinde sich im sogenannten Morse-Potential
$$V(x) = V_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-x/a}\right)^2 \ .$$
Skizzieren Sie $V(x)$. Bestimmen Sie den Mittelwert $\langle V'(X) \rangle$. An welcher Stelle x_0 verschwindet dieser?

c) Entwickeln Sie $\langle V'(X) \rangle$ bis zur Ordnung b^2/a^2. Stimmt das Resultat mit obiger Entwicklung von $-\langle f(X) \rangle$ überein?

(21) Die Lorentz-Kraft in der Quantenmechanik **5 P.**

Die Ankopplung eines spinlosen Teilchens der Masse m und Ladung q an das elektromagnetische Feld wird durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 + q\Phi(t, \vec{X}) \quad \text{mit} \quad \vec{V} = \frac{1}{m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t, \vec{X})\right)$$

beschrieben, wobei Φ und die Komponenten von $\vec{A}$ operatorwertige Funktionen sind, welche den elektromagnetischen Potentialen entsprechen. Zeigen Sie für die cartesischen Komponenten von $\vec{V}$, daß
$$[V_i\,, V_j] = \mathrm{i}\,\frac{\hbar q}{m^2 c} \sum_k \varepsilon_{ijk} B_k \ .$$

Verwenden Sie nun das Ehrenfestsche Theorem, um folgende Bewegungsgleichung des Erwartungswertes des Ortsoperators herzuleiten:

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}\langle \vec{X} \rangle = q\langle \vec{E} \rangle + \frac{q}{2c}\langle \vec{V} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{V} \rangle \ ,$$

wobei zwischen $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ und den obigen Potentialen die üblichen aus der klassischen Elektrodynamik bekannten Beziehungen bestehen.