Übungen zur Quantenmechanik I – SS 2007 H 6

Abgabetermin: 29.05.07

(16) Aufenthaltswahrscheinlichkeiten **4 P.**

a) In einem eindimensionalen Problem sei die Wellenfunktion eines Teilchens gegeben durch $\psi(x) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0 x/\hbar}/\sqrt{x^2+a^2}$ mit reellen Konstanten p_0 und $a > 0$ sowie Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Ortsmessung zwischen $-a/\sqrt{3}$ und $+a/\sqrt{3}$ vorzufinden? Bestimmen Sie den Erwartungswert des Impulses $P = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$.

b) In einem dreidimensionalen Problem sei die Wellenfunktion eines Teilchens gegeben durch $\psi(\vec{r}) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-|x|/2a-|y|/2b-|z|/2c}$ mit reellen Konstanten $a, b, c > 0$ sowie Normierungsfaktor $\mathcal{N}$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der ersten Komponente X des Ortsoperators ein Ergebnis zwischen 0 und $d > 0$ zu erhalten?

(17) Summenregeln **5 P.**

Der Hamilton-Operator $H = \vec{P}^2/2M + V(\vec{X})$ besitze ein rein diskretes Spektrum: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. Beweisen Sie unter Benutzung der Vollständigkeitsrelation $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$ für Operatoren der Form $A(\vec{X})$ die Identität

$$\langle n|[A^\dagger, [H, A]]|n\rangle = 2\sum_m (E_m - E_n)\,|\langle m|A|n\rangle|^2 \;,$$

wobei Sie benutzen dürfen, daß Matrixelemente $\langle m|A(\vec{X})|n\rangle$ symmetrisch sind in m und n (dies folgt aus der Tatsache, daß Energieeigenfunktionen in der Ortsdarstellung stets reell gewählt werden können). Berechnen Sie nun mit Hilfe der Kommutatoren

$$[X_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar\,\delta_{ij} \;, \qquad [X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0 \;, \qquad i,j = 1,2,3$$

jeweils den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung für die folgenden beiden Fälle:

a) Die *Thomas–Reiche–Kuhn-Summenregel* folgt für den Operator $A = X_i$.

b) Die *Bethe-Summenregel* erhalten Sie für $A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{X}}$, wobei $\vec{k}$ ein beliebiger reeller Vektor ist. Zeigen Sie dazu, daß A unitär ist, d.h. $A^\dagger = A^{-1}$.

(18) Der Virialsatz **4 P.**

Leiten Sie das Ehrenfestsche Theorem her für beliebige zeitabhängige Operatoren $A(t)$ und Zustände $|\psi(t)\rangle$, welche die Schrödinger-Gleichung erfüllen:

$$\partial_t\langle A\rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[H, A]\rangle + \langle\partial_t A\rangle \;, \quad \langle A\rangle \equiv \langle\psi(t)|A(t)|\psi(t)\rangle \;.$$

Der Hamilton-Operator habe nun die Form $H = T + V = \vec{P}^2/2m + V(\vec{X})$.

a) Wie lauten $\partial_t\langle\vec{X}\rangle$ und $\partial_t\langle\vec{P}\rangle$?

b) Zeigen Sie, daß $\partial_t\langle\vec{X}\cdot\vec{P}\rangle = 2\langle T\rangle - \langle\vec{X}\cdot\nabla V\rangle$. Was ergibt sich, wenn der Zustand $|\psi(t)\rangle$ stationär ist?

c) Es sei V nun homogen vom Grade n, d.h. $V(\alpha\vec{X}) = \alpha^n V(\vec{X})$. Zeigen Sie, daß dann für stationäre Zustände die Beziehung $2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$ gilt. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem zum stationären Zustand gehörenden Energieeigenwert E und $\langle T\rangle$ allgemein sowie speziell für die Potentiale $V = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{X}^2$ und $V = -e^2|\vec{X}|^{-1}$?