Übungen zur Quantenmechanik I – SS 2007 $\boxed{\text{H 5}}$

Abgabetermin: 22.05.07

(13) Kommutatoren **4 P.**

Es seien A, B und C lineare Operatoren. Der Kommutator zweier Operatoren ist durch $[A\,,B] \equiv AB - BA = -[B\,,A]$ definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) Linearität: $[A\,,\alpha B + \beta C] = \alpha[A\,,B] + \beta[A\,,C]$ mit $\alpha, \beta \in K$

b) Produktregel: $[A\,,BC] = B[A\,,C] + [A\,,B]C$

c) Jacobi-Identität: $[A\,,[B\,,C]] + [B\,,[C\,,A]] + [C\,,[A\,,B]] = 0$

d) Konjugation: $[A\,,B]^\dagger = [B^\dagger\,,A^\dagger]$

e) Falls $[B\,,[A\,,B]] = 0$, so gilt für analytische Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, daß

$$[A\,,f(B)] = [A\,,B]\,f'(B)\ .$$

Es seien nun X und P zwei Operatoren mit Kommutator $[X\,,P] = \mathrm{i}\hbar\,\mathbb{1}$. Berechnen Sie den Kommutator von $H = P^2/2m + V(X)$ (wobei $V(X)$ eine Entwicklung wie oben zulasse) mit X und mit P.

(14) Baker–Campbell–Hausdorff-Formeln **4 P.**

Es seien A und B zwei lineare Operatoren, die nicht miteinander vertauschen: $[A\,,B] \neq 0$. Ein Vergleich der Potenzreihen zeigt, daß dann die Operatoren $\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B$, $\mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A$ und e^{A+B} jeweils verschieden sind. Die Korrekturen zu dem Fall vertauschender Operatoren ergeben sich unter anderem aus den folgenden Identitäten:

a) Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{e}^A B\,\mathrm{e}^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\mathrm{ad}_A^n B \quad \text{mit} \quad \mathrm{ad}_A B \equiv [A\,,B]\ ,$$

indem Sie die Taylor-Entwicklung von $F(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda A} B\,\mathrm{e}^{-\lambda A}$ in λ betrachten.

b) Es gelte $[A\,,[A\,,B]] = [B\,,[A\,,B]] = 0$. Zeigen Sie, daß die Funktion $F(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda A}\,\mathrm{e}^{\lambda B}$ die Differentialgleichung $F'(\lambda) = \big(A + B + \lambda[A\,,B]\big)\,F(\lambda)$ erfüllt, und gewinnen Sie aus ihrer Lösung die Identitäten

$$\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A\,,B]} = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^{[A\,,B]}\ .$$

(15) Kommutierende Operatoren **4 P.**

Betrachten Sie zwei Operatoren A und B in einem vierdimensionalen Vektorraum, deren Matrixelemente bzgl. der Orthonormalbasis $|e_1\rangle, \ldots, |e_4\rangle$ durch

$$(A_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ , \qquad (B_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben seien. Zeigen Sie, daß A und B kommutieren, und bestimmen Sie eine gemeinsame Basis von normierten Eigenvektoren $|a, b\rangle$, wobei a und b die Eigenwerte von A bzw. B bezeichnen mögen: $A|a, b\rangle = a|a, b\rangle$ und $B|a, b\rangle = b|a, b\rangle$.

Paarweise vertauschende selbstadjungierte Operatoren bilden einen *vollständigen Satz von kommutierenden Observablen*, wenn ihre gemeinsamen Eigenvektoren eindeutig (bis auf einen multiplikativen Faktor) durch Angabe aller zugehörigen Eigenwerte bestimmt sind, d.h., wenn die gemeinsamen Eigenvektoren nicht entartet sind. Welche der drei Sätze von Operatoren $\{A\}$, $\{B\}$, $\{A; B\}$ erfüllen diese Bedingung?