Übungen zur Quantenmechanik I – WS 2007/08 $\boxed{\text{H 1}}$

Abgabetermin: 30.10.07

(1) Hermite-Polynome **4 P.**

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\langle f\,,g\rangle = \int dx\ \mathrm{e}^{-x^2} f(x)\,g(x)$$

auf dem Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ ein positiv-definites Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis $(e_0,\ldots,e_4)$ des Unterraumes $L(f_0,\ldots,f_4)$ mit $f_n = x^n$. Dabei können Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren verwenden:

$$e_n = f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle e_i\,,f_n\rangle}{\langle e_i\,,e_i\rangle}\,e_i\ .$$

(Die Funktionen $H_n(x) = 2^n e_n(x)$ sind die Hermite-Polynome, die Ihnen bei der Behandlung des harmonischen Oszillators wiederbegegnen werden.)

(2) Fourier-Transformation **4 P.**

Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist definiert durch die lineare Abbildung

$$f(x) \ \mapsto\ \tilde{f}(k) = \int dx\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \quad \text{mit dem Inversen} \quad f(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}(k)\ .$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ und Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(-x) \ \mapsto\ \tilde{f}(-k)\ ,$

b) $f(x-a) \ \mapsto\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\tilde{f}(k)\ ,$

c) $a \neq 0:\ f(x/a) \ \mapsto\ |a|\,\tilde{f}(ka)\ ,$

d) $f(x)\,g(x) \ \mapsto\ \displaystyle\int \frac{dq}{2\pi}\ \tilde{f}(q)\,\tilde{g}(k-q)\ .$

(3) Die Exponentialfunktion **4 P.**

Es sei A ein linearer Operator. Die Exponentialabbildung ist definiert durch die Potenzreihe

$$\mathrm{e}^A \equiv \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,A^n\ .$$

a) Zeigen Sie: Ist A hermitesch ($A^\dagger = A$), so ist $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ unitär, d.h., $U^\dagger = U^{-1}$.

b) Die Pauli-Matrizen sind durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $\exp(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})$, wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor mit Komponenten a_i ist und $\vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \sum_i a_i\,\sigma_i$.

Es wird eine **Zwischenklausur** in der 50. Kalenderwoche (10.–14. Dezember) geben sowie eine abschließende **Klausur**, die am Montag, den 25. Februar 2008 um 14 Uhr stattfindet.