Lösungen zur Übung Quantenmechanik

SS 2007

(34) Normaler Zeeman-Effekt

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{2}\nabla \times \left(\vec{B} \times \vec{r}\right) \overset{\vec{B}=\text{const.}}{=} \frac{1}{2}\left[\vec{B}(\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{r}\right] = \frac{1}{2}\left[3\vec{B} - \vec{B}\right] = \vec{B}$$

$$\begin{aligned}
H &\overset{(21)}{=} \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\Phi \\
&= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2 + q\Phi \\
&= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left(2\vec{A}\cdot\vec{p} + [p_i, A_i]\right) + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2 + q\Phi \\
[p_i, A_i] &= -i\hbar\,\partial_i A_i = -i\hbar(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{i\hbar}{2}\,\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) = \frac{i\hbar}{2}\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{r}) = 0 \\
\vec{A}\cdot\vec{p} &= \frac{1}{2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{L} \\
q\Phi &= (-e)\frac{e}{r} = -\frac{e^2}{r} \\
\Rightarrow\quad H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{e}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{L} + \underbrace{\frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2}_{\ll \frac{e}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{L}} - \frac{e^2}{r} \approx \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}}_{=:H_0} + \frac{e}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{L}
\end{aligned}$$

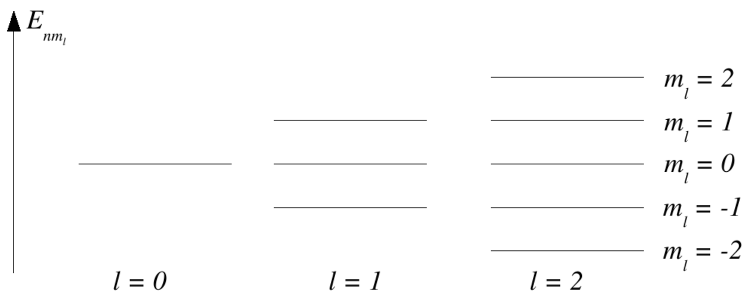
Für H_0 sind die Eigenfunktionen $|nlm_l\rangle$ bekannt. Sie sind auch Eigenfunktionen des genäherten Hamilton-Operators (mit $\vec{B} = B\vec{e}_z$), denn

$$\begin{aligned}
H|nlm_l\rangle &= \left(H_0 + \frac{e}{2mc}BL_z\right)|nlm_l\rangle = \left(-\frac{E_1}{n^2} + \frac{eB\hbar}{2mc}m_l\right)|nlm_l\rangle \\
\Rightarrow\quad E_{nm_l} &= -\frac{E_1}{n^2} + \hbar\omega_L m_l \qquad \text{mit } \omega_L := \frac{eB}{2mc} \quad \text{(Lamor-Frequenz)}\ .
\end{aligned}$$

Jeder Energiewert ist in l entartet. Der Entartungsgrad $D_{E_{nm_l}}$ ist

$$D_{E_{nm_l}} = \sum_{l=|m_l|}^{n-1} = n - |m_l| \quad .$$

Beispiel für $n = 3$:



(35) Anharmonischer Oszillator

$|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne die Eigenzustände des ungestörten harmonischen Oszillators. $|\psi_n(\lambda)\rangle$ seien die Eigenzustände des gegebenen Hamilton-Operators.

$$\begin{aligned}
|\psi_n(\lambda)\rangle &= |n\rangle + \lambda|n^1\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\Rightarrow \quad \langle X\rangle &= \langle\psi_n(\lambda)|X|\psi_n(\lambda)\rangle = \langle n|X|n\rangle + \lambda\Big(\langle n|X|n^1\rangle + \langle n^1|X|n\rangle\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\underbrace{\langle n|a+a^\dagger|n\rangle}_{=0} + 2\lambda\,\mathrm{Re}\Big(\langle n|a+a^\dagger|n^1\rangle\Big)\right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\,\mathrm{Re}\Big(\sqrt{n+1}\langle n+1|n^1\rangle + \sqrt{n}\langle n-1|n^1\rangle\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der bekannten Resultate der linearen Störungstheorie ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\langle n\pm 1|n^1\rangle &= \langle n\pm 1|\sum_{m\neq n}|m\rangle\frac{\langle m|\overbrace{X^3+\varrho X^4}^{=:H_1}|n\rangle}{E_n^0 - E_m^0} = \frac{\langle n\pm 1|H_1|n\rangle}{E_n^0 - E_{n\pm 1}^0} = \mp\frac{1}{\hbar\omega}\langle n\pm 1|H_1|n\rangle \\
\langle n+1|(a+a^\dagger)^3|n\rangle &= \langle n+1|(a^\dagger)^2 a + a^\dagger a a^\dagger + a(a^\dagger)^2|n\rangle = 3\langle n+1|(a^\dagger)^2 a + a^\dagger|n\rangle \\
&= 3\langle n+1|a^\dagger(N+1)|n\rangle = 3\sqrt{n+1}(n+1) \\
\langle n-1|(a+a^\dagger)^3|n\rangle &= 3\langle n-1|a^\dagger a^2 + a|n\rangle = 3n\sqrt{n} \\
\langle n\pm 1|(a+a^\dagger)^4|n\rangle &= 0\ ,\ \text{da in } (a+a^\dagger)^4 \text{ kein Summand der Form } (a^\dagger)^{l\pm 1}a^l \text{ auftritt.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \langle X\rangle &= \frac{2\lambda}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\mathrm{Re}\Big(\sqrt{n}\langle n-1|H_1|n\rangle - \sqrt{n+1}\langle n+1|H_1|n\rangle\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \frac{2\lambda}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\mathrm{Re}\Big(3n^2 - 3(n+1)^2\Big) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= -\frac{3\lambda\hbar}{2m^2\omega^3}(2n+1) + \mathcal{O}(\lambda^2)
\end{aligned}$$

(36) Potentialtopf mit Störung

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | V(X) | \psi_n^{(0)} \rangle = \int_0^a dx\, |\psi_n^{(0)}|^2 V(x)$$

Mit $\psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$ (Aufgabe 7) folgt:

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} &= \frac{4v_0}{a^2} \int_0^a dx \left| x - \frac{a}{2} \right| \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \\
&= 2v_0 \int_0^1 dx \left| x - \frac{1}{2} \right| \Big[1 - \cos(2n\pi x) \Big] \\
&= 2v_0 \int_{-1/2}^{1/2} dy\, |y| \Big[1 - \cos(n\pi) \cos(2n\pi y) \Big] \\
&= 4v_0 \int_0^{1/2} dy\, y\, \partial_y \left[y - \frac{(-1)^n}{2n\pi} \sin(2n\pi y) \right] \\
&= 4v_0 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2n\pi} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \right] - 4v_0 \int_0^{1/2} dy \left[y - \frac{(-1)^n}{2n\pi} \sin(2n\pi y) \right] \\
&= v_0 - 4v_0 \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{(-1)^n}{(2n\pi)^2} \cos(2n\pi y) \right]_0^{1/2} \\
&= v_0 - 4v_0 \left[\frac{1}{8} + \frac{(-1)^n}{(2n\pi)^2} \cos(n\pi) - \frac{(-1)^n}{(2n\pi)^2} \right] \\
&= \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{(n\pi)^2} \left[(-1)^n - 1 \right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{v_0}{2} & , \ n \text{ gerade} \\ \dfrac{v_0}{2\pi^2} \left(\pi^2 - \dfrac{4}{n^2} \right) & , \ n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&> 0 \quad \forall n
\end{aligned}$$