Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Serie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

17. Juli 2008

Aufgabe 31

a)

- Zu zeigen ist: $T_a^\dagger = T_a^{-1}$, das heißt

$$\left\langle T_a^{-1}\Psi, \Phi\right\rangle = \langle \Psi, T_a\Phi\rangle \quad \forall\ \Psi, \Phi \in L_2(\mathbb{R})$$

Tatsächlich ist

$$\left\langle T_a^{-1}\Psi, \Phi\right\rangle = \langle T_{-a}\Psi, \Phi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} (T_{-a}\Psi)^*(x)\Phi(x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \Psi^*(x+a)\Phi(x)\ dx$$

$$\overset{\text{Sub: } u=x+a}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \Psi^*(u)\underbrace{\Phi(u-a)}_{(T_a\Phi)(u)}\ du = \langle \Psi, T_a\Phi\rangle$$

- Sei nun $\Psi \neq 0$ Eigenvektor von T, das heißt $T_a\Psi = \lambda\Psi$. Dann folgt

$$\langle \Psi, \Psi\rangle = \langle \Psi, \mathrm{Id}\,\Psi\rangle = \left\langle \Psi, T_a^{-1}T_a\Psi\right\rangle = \left\langle \left(T^{-1}\right)^\dagger \Psi, \Psi\right\rangle = \langle T\Psi, T\Psi\rangle = \langle \lambda\Psi, \Psi\rangle = |\lambda|^2 \langle \Psi, \Psi\rangle$$

also $|\lambda| = 1$ bzw. $\lambda = e^{i\varphi}$ für ein geeignetes, den Zustand Ψ charakterisierendes $\varphi \in [0, 2\pi)$. Somit gilt für diesen Eigenvektor

$$\Psi(x - na) = (T^n\Psi)(x) = \lambda^n\Psi(x) = e^{in\varphi}\Psi(x)$$

- Beginnen mit der Definition von V_e, nennen $\delta_{x_0}(x) := \delta(x - x_0)$ und schreiben

$$\left([\delta_{na}, T_a]\,\Psi\right)(x) = \left(\delta_{na}T_a\Psi - T_a\delta_{na}\Psi\right)(x) = \delta_{na}(x)\Psi(x-a) - \underbrace{\delta_{na}(x-a)}_{\delta_{(n+1)a}(x)}\Psi(x-a)$$

$$\left(\left[T_a, P^2\right]\Psi\right)(x) = -\hbar^2\left(T_a\partial_x^2\Psi - \partial_x^2 T_a\Psi\right)(x) = -\hbar^2\left[\Psi''\mid_{x-a} - \Psi''\mid_{x-a}\right] = 0$$

$$[T_a, \mathcal{H}] = -\frac{1}{2m}\underbrace{\left[T_a, P^2\right]}_{0} - \frac{\hbar^2\lambda}{m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{[\delta_{na}, T_a]}_{\delta_{na}T_a - \delta_{(n+1)a}T_a} = -\frac{\hbar^2\lambda}{m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{na}T_a + \frac{\hbar^2\lambda}{m}\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{(n+1)a}T_a}_{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{na}T_a} = 0$$

$\square$

b) • Sei Ψ analytisch. Dann gilt

$$\left(e^{-i\frac{a}{\hbar}P}\Psi\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{\hbar^n n!} \left(P^n \Psi\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{\hbar^n n!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \partial_x^n \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \Psi^{(n)}(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(x-a)-x]^n}{n!} \Psi^{(n)}(x) \overset{*}{\cong} \Psi(x-a) = (T_a\Psi)(x)$$

$(*)$: Entwicklung von Ψ um den Punkt x

• Die Impulseigenzustände sind gegeben durch

$$\Phi_q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{q}{\hbar}x}$$

Es sei

$$\underbrace{T_a}_{e^{-i\frac{a}{\hbar}P}} \Psi_\varphi = e^{i\varphi}\Psi_\varphi \ , \ \Psi_\varphi = \int_{\mathbb{R}} dq \ C_q \Phi_q$$

Dann folgt

$$e^{-i\frac{a}{\hbar}P}\Psi_\varphi = \int_{\mathbb{R}} dq \ C_q e^{-i\frac{a}{\hbar}P}\Phi_q \overset{P\Phi_q = q\Phi_q}{=} \int_{\mathbb{R}} dq \ C_q e^{-i\frac{a}{\hbar}q}\Phi_q \overset{!}{=} e^{i\varphi}\Psi_\varphi = \int_{\mathbb{R}} dq \ C_q e^{i\varphi}\Phi_q$$

$$\rightarrow \ C_q \sim \delta_{-\frac{\hbar\varphi}{a}}$$

das heißt

$$\Psi_\varphi(x) = C \cdot \Phi_{-\frac{\hbar\varphi}{a}}(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{\varphi}{a}x} \ , \ C \in \mathbb{C}$$