Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

7. Juli 2008

Korollar 01

Für Operator B und Skalar λ, für die $\sqrt{\lambda + B} =: \tilde{B}$ existiert, gilt:

$$\left[\tilde{B}, B\right] = 0$$

Beweis:

$$B = \tilde{B}^2 - \lambda \;\Rightarrow\; \left[\tilde{B}, B\right] = \left[\tilde{B}, \tilde{B}^2 - \lambda\right] = \underbrace{\left[\tilde{B}, \tilde{B}^2\right]}_{0} - \underbrace{\left[\tilde{B}, \lambda\right]}_{0} = 0$$

Aufgabe 01

Nennen $A := \sqrt{2j - a^\dagger a}$. Dann gilt:

$$\left[a^\dagger a, A\right] = -\left[-a^\dagger a, \sqrt{2j + (-a^\dagger a)}\right] \overset{\text{Korollar 01}}{=} 0 \tag{1}$$

$$\left[A^2, a\right] = \underbrace{\left[2j, a\right]}_{0} - \left[a^\dagger a, a\right] = -a^\dagger \underbrace{\left[a, a\right]}_{0} - \underbrace{\left[a^\dagger, a\right]}_{-\,\mathrm{Id}} a = a \tag{2}$$

$$\left[A^2, a^\dagger\right] = \underbrace{\left[2j, a^\dagger\right]}_{0} - \left[a^\dagger a, a^\dagger\right] = -a^\dagger \underbrace{\left[a, a^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} - \underbrace{\left[a^\dagger, a^\dagger\right]}_{0} a = -a^\dagger \tag{3}$$

Es muss unter anderem gelten:

$$2J_z \overset{!}{=} \left[J_+, J_-\right] = \left[Aa, a^\dagger A\right] = A\left[a, a^\dagger A\right] + \left[A, a^\dagger A\right] a = Aa^\dagger\left[a, A\right] + A\underbrace{\left[a, a^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} A + a^\dagger \underbrace{\left[A, A\right]}_{0} a + \left[A, a^\dagger\right] Aa$$

$$= A^2 + A\underbrace{\left[a^\dagger a, A\right]}_{0 \text{ wegen } (1)} - A\left[a^\dagger, A\right] a + \underbrace{\left[A^2, a^\dagger\right]}_{-a^\dagger \text{ wegen } (3)} a - \underbrace{A\left[A, a^\dagger\right] a}_{-A[a^\dagger, A]a} = A^2 - a^\dagger a = 2j - 2a^\dagger a$$

das heißt es ist

$$\boxed{J_z = j - a^\dagger a = A^2 - j}$$

Tatsächlich, erfüllt J_z auch die anderen Bedingungen:

$$\left[J_z, J_+\right] = \left[A^2 - j, Aa\right] = \left[A^2, Aa\right] - \underbrace{\left[j, Aa\right]}_{0} = \underbrace{\left[A^2, A\right]}_{0} a + A\underbrace{\left[A^2, a\right]}_{a \text{ wegen } (2)} = Aa = J_+ \qquad \checkmark$$

$$\left[J_z, J_-\right] = \left[A^2 - j, a^\dagger A\right] = \left[A^2, a^\dagger A\right] - \underbrace{\left[j, a^\dagger A\right]}_{0} = a^\dagger \underbrace{\left[A^2, A\right]}_{0} + \underbrace{\left[A^2, a^\dagger\right]}_{-a^\dagger \text{ wegen } (3)} A = -a^\dagger A = -J_- \qquad \checkmark$$

und schließlich

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ \\ \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \\ \\ J_z \end{pmatrix} \to \mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{1}{4}\left(J_+ + J_-\right)^2 - \frac{1}{4}\left(J_+ - J_-\right)^2 + J_z^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[J_+^2 + J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+ - J_+^2 - J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+\right] + J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$$

$$= J_+J_- + \underbrace{\frac{1}{2}\left[J_-, J_+\right]}_{-J_z} + \left(j - a^\dagger a\right)^2 = A \underbrace{aa^\dagger}_{\mathrm{Id} + a^\dagger a} A - j + a^\dagger a + j^2 + \left(a^\dagger a\right)^2 - 2ja^\dagger a$$

$$= A^2 + Aa^\dagger a A - j + a^\dagger a + j^2 + \left(a^\dagger a\right)^2 - 2ja^\dagger a \overset{(1)}{=} 2j - a^\dagger a + \underbrace{A^2}_{2j - a^\dagger a} a^\dagger a - j + a^\dagger a + j^2 + \left(a^\dagger a\right)^2 - 2ja^\dagger a = j(j+1)$$

Aufgabe 02

Bezeichnung:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ \\ \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \\ \\ J_z \end{pmatrix}$$

Drehimpulsalgebra

Es muss unter anderem gelten: $[J_+, J_-] = 2J_z$, woraus folgt

$$2J_z = \left[a^\dagger b, b^\dagger a\right] = a^\dagger \left[b, b^\dagger a\right] + \left[a^\dagger, b^\dagger a\right] b = a^\dagger b^\dagger \underbrace{\left[b, a\right]}_{0} + a^\dagger \underbrace{\left[b, b^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} a + b^\dagger \underbrace{\left[a^\dagger, a\right]}_{-\mathrm{Id}} b + \underbrace{\left[a^\dagger, b^\dagger\right]}_{0} ab = a^\dagger a - b^\dagger b$$

das heißt

$$\boxed{J_z = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a - b^\dagger b\right)}$$

Tatsächlich ist dann auch

$$2\left[J_z, J_+\right] = \left[a^\dagger a, a^\dagger b\right] - \left[b^\dagger b, a^\dagger b\right] = a^\dagger \left[a, a^\dagger b\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger b\right] a - b^\dagger \left[b, a^\dagger b\right] - \left[b^\dagger, a^\dagger b\right] b$$

$$= a^\dagger a^\dagger \underbrace{\left[a, b\right]}_{0} + a^\dagger \underbrace{\left[a, a^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} b + a^\dagger \underbrace{\left[a^\dagger, b\right]}_{0} a + \underbrace{\left[a^\dagger, a^\dagger\right]}_{0} ba - b^\dagger a^\dagger \underbrace{\left[b, b\right]}_{0} - b^\dagger \underbrace{\left[b, a^\dagger\right]}_{0} b - a^\dagger \underbrace{\left[b^\dagger, b\right]}_{-\mathrm{Id}} b - \underbrace{\left[b^\dagger, a^\dagger\right]}_{0} b^2 = 2a^\dagger b = 2J_+ \quad \checkmark$$

$$2\left[J_z, J_-\right] = \left[a^\dagger a, b^\dagger a\right] - \left[b^\dagger b, b^\dagger a\right] = a^\dagger \left[a, b^\dagger a\right] + \left[a^\dagger, b^\dagger a\right] a - b^\dagger \left[b, b^\dagger a\right] - \left[b^\dagger, b^\dagger a\right] b$$

$$= a^\dagger b^\dagger \underbrace{\left[a, a\right]}_{0} + a^\dagger \underbrace{\left[a, b^\dagger\right]}_{0} a + b^\dagger \underbrace{\left[a^\dagger, a\right]}_{-\mathrm{Id}} a + \underbrace{\left[a^\dagger, b^\dagger\right]}_{0} a^2 - b^\dagger b^\dagger \underbrace{\left[b, a\right]}_{0} - b^\dagger \underbrace{\left[b, b^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} a - b^\dagger \underbrace{\left[b^\dagger, a\right]}_{0} b - \underbrace{\left[b^\dagger, b^\dagger\right]}_{0} ab = -2b^\dagger a = -2J_- \quad \checkmark$$

Eigenzustände von J_z

Es gilt unter anderem:

$$\left[a, \left(a^\dagger\right)^n\right] \overset{\text{Übungsserie 10}}{=} n \left(a^\dagger\right)^{n-1} \; , \; n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

$$\left[b, \left(b^\dagger\right)^n\right] \overset{\text{Übungsserie 10}}{=} n \left(b^\dagger\right)^{n-1} \; , \; n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Nennen

$$\Omega_{jm} := \frac{1}{\sqrt{(j+m)!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(j-m)!}}$$

schreiben

$$J_z \left|jm\right\rangle = \frac{\Omega_{jm}}{2} \left[a^\dagger a - b^\dagger b\right] \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} \left|0_a 0_b\right\rangle = \frac{\Omega_{jm}}{2} \left[a^\dagger a \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - b^\dagger b \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m}\right] \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{a^\dagger \left[\left(a^\dagger\right)^{j+m} a + (j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m-1}\right] \left(b^\dagger\right)^{j-m} - b^\dagger b \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m}\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{[a,b^\dagger]=[b,a^\dagger]=0}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{\left(a^\dagger\right)^{j+m+1} \left(b^\dagger\right)^{j-m} a + (j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - b^\dagger \left(a^\dagger\right)^{j+m} b \left(b^\dagger\right)^{j-m}\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{a|0_a 0_b\rangle=0}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - b^\dagger \left(a^\dagger\right)^{j+m} b \left(b^\dagger\right)^{j-m}\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - b^\dagger \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left[\left(b^\dagger\right)^{j-m} b + (j-m) \left(b^\dagger\right)^{j-m-1}\right]\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{b|0_a 0_b\rangle=0}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - (j-m) b^\dagger \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m-1}\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$\overset{[b^\dagger,a^\dagger]=0}{=} \frac{\Omega_{jm}}{2} \left\{(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} - (j-m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m}\right\} \left|0_a 0_b\right\rangle$$

$$= m \cdot \underbrace{\Omega_{jm} \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} \left|0_a 0_b\right\rangle}_{\left|jm\right\rangle} = m \cdot \left|jm\right\rangle$$

und sehen dass $|jm\rangle$ Eigenzustand von J_z zum Eigenwert m ist. Anderseits ist

$$\mathbf{J}^2 |jm\rangle \overset{\text{Aufgabe 01}}{=} \left[J_+J_- - J_z + J_z^2\right] |jm\rangle \overset{J_z|jm\rangle=m|jm\rangle}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + J_+J_-\,|jm\rangle$$

$$= (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm} a^\dagger b b^\dagger a \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left(b^\dagger\right)^{j-m} |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{(4)}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm} a^\dagger b b^\dagger \left[\left(a^\dagger\right)^{j+m} a + (j+m)\left(a^\dagger\right)^{j+m-1}\right] \left(b^\dagger\right)^{j-m} |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{[a,b^\dagger]=0}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm} a^\dagger b b^\dagger \left[\left(a^\dagger\right)^{j+m}\left(b^\dagger\right)^{j-m} a + (j+m)\left(a^\dagger\right)^{j+m-1}\left(b^\dagger\right)^{j-m}\right] |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{a|0_a0_b\rangle=0}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm} a^\dagger b b^\dagger (j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m-1} \left(b^\dagger\right)^{j-m} |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{[b^\dagger,a^\dagger]=[b,a^\dagger]=0}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm}(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} b \left(b^\dagger\right)^{j-m+1} |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{(5)}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + \Omega_{jm}(j+m) \left(a^\dagger\right)^{j+m} \left[\left(b^\dagger\right)^{j-m+1} b + (j-m+1)\left(b^\dagger\right)^{j-m}\right] |0_a 0_b\rangle$$

$$\overset{b|0_a0_b\rangle=0}{=} (-m+m^2)\,|jm\rangle + (j+m)(j-m+1)\underbrace{\Omega_{jm}\left(a^\dagger\right)^{j+m}\left(b^\dagger\right)^{j-m}|0_a 0_b\rangle}_{|jm\rangle} = j(j+1)\cdot|jm\rangle$$

Aufgabe 28

Entwicklung des Zustandes

Die Kugelflächenfunktionen sind für $l \in \mathbb{N}_0,\ m = -l, .., l$ gegeben durch

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_{lm} P_{lm}(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \ ,\ N_{lm} := \sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \ ,\ Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$$

wobei die P_{lm} die zugeordneten Legendrepolynome sind:

$$P_{lm}(x) := \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

Dabei erfüllen die Kugelflächenfunktionen die Orthogonalitätsrelation

$$\int\limits_{\partial B_1(0)} Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\ d\Omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

und bilden ein vollständiges System im Raum der quadratintegrablen Funktionen $f(\vartheta,\varphi)$. Die ersten paar Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \ ,\ Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\cdot e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) \ ,\ Y_{2,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot e^{\pm i\varphi} \ ,\ Y_{2,\pm2}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\cdot e^{\pm 2i\varphi}$$

so dass wir den Zustand

$$\psi(\vec{r}) = \frac{a^{5/2}}{\sqrt{7\pi}} \left(\alpha^{-1} + x + 2y + z\right) \cdot e^{-\alpha r}$$

entwickeln können gemäß

$$\psi(\vec{r}) = \frac{a^{5/2} e^{-\alpha r}}{\alpha\sqrt{7\pi}} + \frac{a^{5/2}}{\sqrt{7\pi}} \left[\sin\vartheta\cos\varphi + 2\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\right] \cdot re^{-\alpha r}$$

$$= \frac{a^{5/2} e^{-\alpha}}{\alpha\sqrt{7\pi}} + \frac{a^{5/2} r}{2\sqrt{7\pi}} \left[\sin\vartheta e^{i\varphi} + \sin\vartheta e^{-i\varphi} - 2i\sin\vartheta e^{i\varphi} + 2i\sin\vartheta e^{-i\varphi} + 2\cos\vartheta\right] \cdot re^{-\alpha r}$$

$$= \underbrace{\frac{a^{5/2}}{\alpha}\sqrt{\frac{4}{7}}}_{a_{00}} \cdot Y_{00}(\vartheta,\varphi) \cdot e^{-\alpha r} + \underbrace{a^{5/2}\sqrt{\frac{2}{21}}(2i-1)}_{a_{11}} \cdot Y_{11}(\vartheta,\varphi) \cdot re^{-\alpha r}$$

$$+ \underbrace{a^{5/2}\sqrt{\frac{2}{21}}(1+2i)}_{a_{1,-1}} \cdot Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi) \cdot re^{-\alpha r} + \underbrace{a^{5/2}\sqrt{\frac{4}{21}}}_{a_{10}} \cdot Y_{10}(\vartheta,\varphi) \cdot re^{-\alpha r}$$

Normierung des Zustandes

Für einen beliebigen Zustand

$$\psi = \sum_{l,m} R_{lm}(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\ ,\ R_{lm} : \text{beliebig quadratintegrabel}$$

ergibt sich die Norm als:

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{r})|^2\ d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l,m,l',m'} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \cdot R^*_{l'm'}(r) \cdot Y^*_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\ d^3x$$

$$= \sum_{l,m,l',m'} \int_{\mathbb{R}^+} dr\ r^2 R_{lm} R^*_{l'm'} \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) Y^*_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\ d\Omega}_{\delta_{ll'}\delta_{mm'}} = \sum_{m,l} \int_{\mathbb{R}^+} |R_{lm}(r)|^2\, r^2\ dr$$

Speziell in unserem Fall also:

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^+} \left\{ |a_{00}|^2\, r^2 e^{-2\alpha r} + \left[|a_{11}|^2 + |a_{1,-1}|^2 + |a_{1,0}|^2\right] \cdot r^4 e^{-2\alpha r} \right\}\ dr$$

$$= \left[|a_{00}|^2 \cdot \left[\frac{r^2}{-2\alpha} + \frac{r}{-2\alpha^2} + \frac{1}{-4\alpha^3}\right] \cdot e^{-2\alpha r} + \left[|a_{11}|^2 + |a_{1,-1}|^2 + |a_{1,0}|^2\right] \cdot \left[\frac{r^4}{-2\alpha} + \frac{r^3}{-\alpha^2} + \frac{3r^2}{-2\alpha^3} + \frac{3r}{-2\alpha^4} + \frac{3}{-4\alpha^5}\right] \cdot e^{-2\alpha r} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{|a_{00}|^2}{4\alpha^3} + \frac{3}{4\alpha^5} \cdot \left[|a_{11}|^2 + |a_{1,-1}|^2 + |a_{1,0}|^2\right] = \frac{|a|^5}{\alpha^5}$$

Fordern wir die Normierung des Zustands, so ergibt sich

$$|a| \overset{!}{=} \alpha\ \rightarrow\ a = \alpha e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}\ ,\ \text{o.B.d.A}\ \varphi = 0$$

Messung von $\mathbf{L}^2$

Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} sind Eigenfunktionen der Operatoren L_z und $\mathbf{L}^2$ jeweils zu den Eigenwerten $\hbar m$ bzw. $\hbar^2 l(l+1)$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_l$ bei einem Zustand ψ einen bestimmten Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ zu messen ergibt sich allgemein als

$$\mathcal{P}_l = \sum_{m=-l}^{l} \mathcal{P}_{ml} \quad , \quad \mathcal{P}_{lm} := |\langle Y_{lm}, \psi \rangle|^2$$

wobei für Zustände der Art

$$\psi = \sum_{l,m} R_{lm}(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \ , \ R_{lm} : \text{beliebig quadratintegrabel}$$

dies zu deuten ist als

$$\mathcal{P}_{lm} = \sum_{l',m'} \underbrace{\int_{\partial B_1(0)} d\Omega \ Y^*_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi)}_{\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \cdot \int_0^\infty dr \ \left|R_{l'm'}(r)\right|^2 r^2 = \int_0^\infty \left|R_{lm}(r)\right|^2 r^2 \ dr$$

Speziell in unserem Fall, sind prinzipiell nur die den Quantenzahlen $(m, l) \in \{(0,0), \ (1,-1), \ (1,0), \ (1,1)\}$ entsprechenden Messergebnisse möglich:

$$0 : \mathcal{P}_0 = |a_{00}|^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2\alpha r} \ dr \overset{\text{analog}}{=} \frac{|a_{00}|^2}{4\alpha^3} = \frac{|a|^5}{7\alpha^5} = \frac{1}{7}$$

$$2\hbar^2 : \mathcal{P}_1 = \left[|a_{11}|^2 + |a_{1,-1}|^2 + |a_{1,0}|^2\right] \cdot \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} \ dr \overset{\text{analog}}{=} \frac{3}{4\alpha^5}\left[|a_{11}|^2 + |a_{1,-1}|^2 + |a_{1,0}|^2\right] = \frac{6\,|a|^5}{7\alpha^5} = \frac{6}{7}$$

Es können somit nur die Werte 0 und $2\hbar^2$, mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten, gemessen werden.

Messung von L_z

Wie schon erwähnt, sind die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} genau die Eigenfunktionen von L_z zu den Eigenwerten $\hbar m$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_m$ den Wert $\hbar m$ zu messen, ergibt sich nach dem gleichen Prinzip wie vorhin, gemäß

$$\mathcal{P}_m = \sum_{l=0}^{\infty} |\langle Y_{lm}, \psi \rangle|^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty \left|R_{lm}(r)\right|^2 r^2 \ dr$$

Speziell in unserem Fall ist zu erkennen: die einzigen möglichen Messwerte sind genau 0 und $\pm\hbar$, mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$-\hbar : \mathcal{P}_{-1} = |a_{1,-1}|^2 \cdot \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} \ dr = \frac{3\,|a_{1,-1}|^2}{4\alpha^5} = \frac{5\,|a|^5}{14\alpha^5} = \frac{5}{14}$$

$$0 : \mathcal{P}_0 = |a_{00}|^2 \cdot \int_0^\infty r^2 e^{-2\alpha r} \ dr + |a_{10}|^2 \cdot \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} \ dr = \frac{|a_{00}|^2}{4\alpha^3} + \frac{3\,|a_{10}|^2}{4\alpha^5} = \frac{2}{7}$$

$$\hbar : \mathcal{P}_1 = |a_{11}|^2 \cdot \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} \ dr = \frac{3\,|a_{11}|^2}{4\alpha^5} = \frac{5\,|a|^5}{14\alpha^5} = \frac{5}{14}$$