

Übung zur Quantenmechanik I

Sommersemester 2008

Abgabetermin: 08.07.08

26. Holstein-Primakoff-Transformation (3 Punkte)

Betrachten Sie die Operatoren

$$J_+ = \sqrt{2j - a^\dagger a} a, \quad J_- = a^\dagger \sqrt{2j - a^\dagger a}$$

mit $j > 0$, wobei a und a^\dagger die Vertauschungsrelation $[a, a^\dagger] = 1$ erfüllen mögen. Finden Sie einen Operator $J_z(a, a^\dagger)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad \mathbf{J}^2 = j(j+1).$$

27. Schwinger-Bosonen (3 Punkte)

Es seien a, a^\dagger und b, b^\dagger miteinander kommutierende Erzeuger-Vernichter-Paare mit den Vertauschungsrelationen $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$. Welcher Operator J_z spannt mit $J_+ = a^\dagger b = (J_-)^\dagger$ die Drehimpulsalgebra auf? Zeigen Sie, dass die Zustände

$$|jm\rangle = \frac{(a^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0_a 0_b\rangle$$

mit $a|0_a 0_b\rangle = b|0_a 0_b\rangle = 0$ und $|m| \leq j$ gemeinsame Eigenzustände von \mathbf{J}^2 und J_z mit den Quantenzahlen j, m sind.

28. Kugelflächenfunktionen (4 Punkte)

Die normierten Wellenfunktionen eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{a^{5/2}}{\sqrt{7\pi}} (\alpha^{-1} + x + 2y + z) e^{-\alpha r}, \quad \alpha > 0.$$

- Entwickeln Sie $\psi(\mathbf{r})$ nach den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\varphi, \vartheta)$.
- Es wird eine Messung von \mathbf{L}^2 vorgenommen. Welches sind die möglichen Messergebnisse? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für jeden der möglichen Werte.
- Beantworten Sie die Fragen in b) für eine Messung von L_z .