Quantenmechanik I

FSU Jena - SS 08

Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Juli 2008

Aufgabe 01

a) Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left[a, \left(a^\dagger\right)^n\right] = n \cdot \left(a^\dagger\right)^{n-1} \tag{1}$$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang:

$$\left[a, a^\dagger\right] = \mathrm{Id} = 1 \cdot \left(a^\dagger\right)^{1-1}$$

- Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für $n-1$.
- Induktionsschritt: $(n-1) \to n$:

$$\left[a, \left(a^\dagger\right)^n\right] = a^\dagger \underbrace{\left[a, \left(a^\dagger\right)^{n-1}\right]}_{\substack{(n-1)\left(a^\dagger\right)^{n-2} \\ \text{nach Voraussetzung}}} + \underbrace{\left[a, a^\dagger\right]}_{\mathrm{Id}} \left(a^\dagger\right)^{n-1} = (n-1) \underbrace{a^\dagger \left(a^\dagger\right)^{n-2}}_{\left(a^\dagger\right)^{n-1}} + \left(a^\dagger\right)^{n-1} = n \left(a^\dagger\right)^{n-1}$$

□

b) Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left\| \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \right\|^2 = n! \cdot \|\psi_0\|^2$$

Beweis durch Induktion:

- Induktionsanfang:

$$\left\| \left(a^\dagger\right)^1 \psi_0 \right\|^2 = \left\langle a^\dagger \psi_0,\ a^\dagger \psi_0 \right\rangle = \left\langle \psi_0, a a^\dagger \psi_0 \right\rangle \overset{(a)}{=} \left\langle \psi_0, \left[\mathrm{Id} + a^\dagger a\right] \psi_0 \right\rangle \overset{a\psi_0 = 0}{=} \underbrace{\left\langle \psi_0, \psi_0 \right\rangle}_{\|\psi_0\|^2}$$

- Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für $n-1$.
- Induktionsschritt: $(n-1) \to n$. Aus Teil (a.1) folgt für $n \in \mathbb{N}$ direkt

$$a \left(a^\dagger\right)^n = n \left(a^\dagger\right)^{n-1} + \left(a^\dagger\right)^n a \tag{2}$$

so dass wir schreiben können:

$$\|\psi_n\|^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = \left\langle \left(a^\dagger\right)^n \psi_0,\ \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \right\rangle = \left\langle \left(a^\dagger\right)^{n-1} \psi_0,\ a \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(a^\dagger\right)^{n-1} \psi_0,\ \left[n \left(a^\dagger\right)^{n-1} + \left(a^\dagger\right)^n a\right] \psi_0 \right\rangle \overset{a\psi_0 = 0}{=} n \underbrace{\left\langle \left(a^\dagger\right)^{n-1} \psi_0,\ \left(a^\dagger\right)^{n-1} \psi_0 \right\rangle}_{\substack{(n-1)! \cdot \|\psi_0\|^2 \\ \text{nach Voraussetzung}}}$$

$$= n(n-1)! \cdot \|\psi_0\|^2 = n! \cdot \|\psi_0\|^2$$

Mit der Forderung $\|\psi_n\|^2 \overset{!}{=} 1$ ergibt sich demnach

$$1 \overset{!}{=} \left\| c_n \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \right\|^2 = |c_n|^2 \cdot \left\| \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \right\| = |c_n|^2 \cdot n! \cdot \underbrace{\|\psi_0\|^2}_{1} \ \rightarrow \ |c_n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \ \rightarrow \ c_n = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{n!}} \ , \ \varphi \in \mathbb{R}$$

c) Beginnen mit der Definition der Exponentialfunktion, schreiben

$$a\psi_\xi = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \left(a^\dagger\right)^n}{n!} \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \cdot a \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 = a\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \cdot a \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 \overset{(2)}{=} a\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[n \left(a^\dagger\right)^{n-1} + \left(a^\dagger\right)^n a \right] \psi_0$$

$$\overset{a\psi_0 = 0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n-1)!} \left(a^\dagger\right)^{n-1} \psi_0 = \xi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left(a^\dagger\right)^n \psi_0 = \xi e^{\xi a^\dagger} \psi_0 = \xi \psi_\xi$$

und sehen dass ψ_ξ ein Eigenvektor von a zum Eigenwert ξ ist.

d) Aus der linearen Algebra ist bekannt: Ist A ein Operator, $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ eine in A konvergente analytische Funktion, und v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist

$$f(A)v = f(\lambda)v \tag{3}$$

Sind $a_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ so folgt ferner

$$(f(A))^\dagger = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k A^k\right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} \left(A^\dagger\right)^k \overset{a_k \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(A^\dagger\right)^k = f\left(A^\dagger\right) \tag{4}$$

Somit folgt

$$\int \psi_\xi^* \psi_\chi \, dx = \langle \psi_\xi, \psi_\chi \rangle = \left\langle e^{\xi a^\dagger} \psi_0, \psi_\chi \right\rangle = \left\langle \psi_0, \left(e^{\xi a^\dagger}\right)^\dagger \psi_\chi \right\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle \psi_0, \exp\left\{ \left(\xi a^\dagger\right)^\dagger \right\} \psi_\chi \right\rangle$$

$$= \left\langle \psi_0, e^{\overline{\xi} a} \psi_\chi \right\rangle \overset{(3)}{=} \left\langle \psi_0, e^{\overline{\xi}\chi} \psi_\chi \right\rangle = e^{\overline{\xi}\chi} \langle \psi_0, \psi_\chi \rangle = e^{\overline{\xi}\chi} \left\langle \psi_0, e^{\chi a^\dagger} \psi_0 \right\rangle \overset{\text{Analog}}{=} e^{\overline{\xi}\chi} \left\langle e^{\overline{\chi} a} \psi_0, \psi_0 \right\rangle$$

$$\overset{(3)}{=} e^{\overline{\xi}\chi} \left\langle e^0 \psi_0, \psi_0 \right\rangle = e^{\overline{\xi}\chi} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{1} = e^{\overline{\xi}\chi}$$

Aufgabe 02

Energieeigenfunktionen

Beginnen mit dem Hamilton-Operator in Ortsdarstellung

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

und suchen dessen Eigenvektoren φ bzw. Eigenwerte E, das heißt versuchen die Differentialgleichung

$$\mathcal{H}\varphi(x) = E\varphi(x) \ \rightarrow \ -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \varphi(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \varphi(x) \overset{!}{=} E\varphi(x)$$

zu lösen. Durch die Substitutionen

$$\beta := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \ , \ u(x) := \beta x, \ \varphi(x) =: \psi(u(x)) \ , \ \mathcal{E} := -\frac{2mE}{\beta^2 \hbar^2} = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

erhalten wir

$$\partial_x^2\varphi(x) - (\beta^2 x)^2\varphi(x) \overset{!}{=} -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) \overset{\partial_x = \beta\partial_u}{\longrightarrow} \psi''(u) - u^2\psi(u) + \mathcal{E}\psi(u) \overset{!}{=} 0$$

Diese Differentialgleichung besitzt bekanntlich als eigen-Lösungen die Hermit-Funktionen

$$\psi_n(u) = h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\ ,\ \mathcal{E}_n = 2n+1\ ,\ n \in \mathbb{N}_0$$

wobei die H_n die Hermit-Polynome sind. Die h_n erfüllen dabei die Orthogonalitäsbeziehung

$$\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(u) h_m(u)\ du = \delta_{nm} \tag{5}$$

Somit ergeben sich die Lösungen der Differentialgleichung als

$$\varphi_n(x) = C_n \cdot h_n(\beta x),\ C_n \in \mathbb{C}$$

mit den Energie-Eigenwerten

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Fordern die Normierung der φ_n, schreiben also

$$1 \overset{!}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)|^2\ dx = |C_n|^2 \int\limits_{\mathbb{R}} h_n^2(\beta x)\ dx \overset{\text{Sub: } u:=\beta x}{=} \frac{|C_n|^2}{\beta}\int\limits_{\mathbb{R}} h_n^2(u)\ du \overset{(5)}{=} \frac{|C_n|^2}{\beta}\ \rightarrow\ |C_n| = \sqrt{\beta}$$

und erhalten so $C_n = \sqrt{\beta}e^{i\varphi}$ wobei wir o.B.d.A $\varphi = 0$ setzen. Somit ergeben sich schließlich die normierten Eigenfunktionen von $\mathcal{H}$ allgemein als

$$\varphi_n(x) = C_n h_n(\beta x) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot H_n(\beta x) \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}x^2},\ \beta := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{6}$$

Speziell für $\omega = \dfrac{\hbar}{m}$ also

$$\boxed{\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \cdot H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ E_n = \frac{\hbar^2}{m}\left(n + \frac{1}{2}\right)\ ,\ n \in \mathbb{N}_0}$$

Anfangszustand

Die ersten Paar Hermit-Polynome sind bekanntlich gegeben durch

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

so dass abzulesen ist

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= c\left[2(x-1)^2 - 3\right] e^{-\frac{x^2}{2}} = c\left[2x^2 - 4x - 1\right] e^{-\frac{x^2}{2}} = c\left[\frac{1}{2}H_2(x) - 2H_1(x)\right] \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= c\sqrt{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2 2!\sqrt{\pi}}} H_2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - c\sqrt{8\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2!1!\sqrt{\pi}}} H_1(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= c\sqrt{2\sqrt{\pi}} \cdot \varphi_2(x) - c\sqrt{8\sqrt{\pi}} \cdot \varphi_1(x) \end{aligned}$$

Fordern die Normierung des Zustands und bekommen so

$$\|\varphi_0\|^2 = \left|c\sqrt{2\sqrt{\pi}}\right|^2 + \left|c\sqrt{8\sqrt{\pi}}\right|^2 \overset{!}{=} 1\ \rightarrow\ |c| = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt{\pi}}}\ \rightarrow\ c = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{10\sqrt{\pi}}}\ ,\ \text{o.B.d.A } \varphi = 0$$

das heißt es ist

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\varphi_1}$$

Zeitliche Entwicklung

Bekanntlich gilt für einen beliebigen Zustand

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n(t) \cdot \varphi_n(x)$$

mit den Eigenfunktionen φ_n (entsprechend den Energie-Eigenwerte E_n) des zeitunabhängigen Hamilton-Operators:

$$c_n(t) = c_n(t_0) \cdot e^{-\frac{iE_n}{\hbar}(t-t_0)}$$

Somit ist insbesondere in unserem Fall

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}}{\sqrt{5}}\varphi_2(x) - \frac{2e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}}{\sqrt{5}}\varphi_1(x)$$

also

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{e^{-i\frac{5\hbar}{2m}t}}{\sqrt{5}}\varphi_2 - \frac{2e^{-i\frac{3\hbar}{2m}t}}{\sqrt{5}}\varphi_1}$$

Energie-Wahrscheinlichkeiten

Zu erkennen ist: Es können prinzipiell nur die Energieeigenwerte E_1, E_2 gemessen werden. Dabei entspricht die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_n$ den n-ten Energieeigenwert zu messen genau

$$\mathcal{P}_n(t) = |\langle\varphi_n(x), \psi(x,t)\rangle|^2$$

also speziell

$$\mathcal{P}_1 = \left|-\frac{2e^{-i\frac{3\hbar}{2m}t}}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5} \quad , \quad \mathcal{P}_2 = \left|\frac{e^{-i\frac{5\hbar}{2m}t}}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5} \quad , \quad \mathcal{P}_n = 0 \quad \forall\, n \notin \{1,2\}$$

Der Energie-Erwartungswert ergibt sich dann gemäß

$$\langle E\rangle = \sum_n \mathcal{P}_n E_n = \mathcal{P}_1 E_1 + \mathcal{P}_2 E_2 = \frac{17\hbar^2}{10m}$$