Übung zur Quantenmechanik I
Sommersemester 2008

Abgabetermin: 01.07.08

24. Erzeuger und Vernichter (8 Punkte)

Es sei a ein Operator und $a^\dagger$ der zu a hermitesch konjugierte Operator (adjungierter Operator). Es gelte für den Kommutator $[a,\, a^\dagger] := aa^\dagger - a^\dagger a = 1$. Ferner sei $\psi_0(x)$ eine auf Eins normierte Wellenfunktion, für die $a\psi_0(x) = 0$ gilt.

a) Berechnen Sie den Kommutator $[a, (a^\dagger)^n]$.

d) Sei $\psi_n(x) := c_n(a^\dagger)^n\psi_0(x)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n, so dass $\psi_n(x)$ auf Eins normiert ist!

c) Zeigen Sie, dass $\psi_\xi(x) := e^{\xi a^\dagger}\psi_0(x)$ ein Eigenzustand von a ist ($\xi \in \mathbb{C}$) und bestimme den zugehörigen Eigenwert.

d) Berechnen Sie $\int \psi_\xi^*\psi_\chi dx$, wobei ψ_ξ und ψ_χ wie in c) definiert sind.

25. Harmonischer Oszillator (5 Punkte)

Sei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Zustand eines Teilchens der Masse m durch

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \equiv c[2(x-1)^2 - 3]\,\exp(-x^2/2)\,, \qquad c \in \mathbb{C}\,,$$

gegeben. Für $t \geq 0$ befinde sich das Teilchen in einem Oszillator–Potential mit Kreisfrequenz $\omega = \hbar/m$ ($\Leftrightarrow \alpha = 1/\sqrt{2}$).

a) Bestimmen Sie $\varphi(x,t)$ für $t \geq 0$.
Hinweis: Zerlegen Sie $\varphi_0(x)$ nach Energieeigenfunktionen! Schreiben Sie insbesondere dazu zuvor einige der untersten Energieeigenfunktionen explizit auf.

b) Wie wahrscheinlich ist es, das Teilchen zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ (bei einer Messung der Energie) im n–ten Energieniveau anzutreffen? Wie groß ist der Erwartungswert der Energie zu diesem Zeitpunkt?